Darius MINIOTAS

SIGNALAI IR GRANDINĖS

Projekto kodas

VP1-2.2-ŠMM-07-K-01-047

VGTU Elektronikos fakulteto
I pakopos studijų programų
esminis atnaujinimas

Vilnius „Technika“ 2012

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Darius MINIOTAS

SIGNALAI IR GRANDINĖS

Praktinės užduotys ir metodikos nurodymai

Vilnius „Technika“ 2012

D. Miniotas. Signalai ir grandinės: praktinės užduotys ir metodikos nurodymai. Vilnius: Technika, 2012. 129 p. [4,48 aut. l. 2012 06 04].

Uždavinynė pateikta žinių apie signalus ir jų apdorojimą tiesinėse stacionario-siose grandinėse, ugdomi gebėjimai analizuoti tokias grandines Laplaso ir Furjė transformacijų bei sąsūkos integralo metodais, tam pasitelkiant ir MATLAB® programinę įrangą.

Uždavinynas skirtas VGTU Elektronikos fakulteto I pakopos studentams, studijuojantiems „Elektronikos inžinerija“ studijų programoje „ELESB11402 Signalai ir grandinės 1“ bei „ELESB11501 Signalai ir grandinės 2“ dalykus.

Leidinį rekomendavo VGTU Elektronikos fakulteto studijų komitetas

Recenzavo:

doc. dr. Andrius Užinskas, VGTU Elektroninių sistemų katedra

dr. Dalius Matuzevičius, VGTU Elektroninių sistemų katedra

Leidiny parengtas vykdant projektą „VGTU Elektronikos fakulteto I pakopos studijų programų esminis atnaujinimas“. Leidinio rengimą ir leidybą finansavo Vilniaus Gedimino technikos universitetas ir Europos socialinis fondas (sutarties Nr. VP1-2.2-ŠMM-07-K-01-047).

VGTU leidyklos TECHNIKA 1325-S mokomosios
metodinės literatūros knyga <http://leidykla.vgtu.lt>

Redaktorė *Irutė Raišutienė*

Maketuotoja *Laura Petrauskienė*

eISBN 978-609-457-145-9

doi:10.3846/1325-S

© Darius Miniotas, 2012

© Vilniaus Gedimino technikos universitetas, 2012

TURINYS

Pratarmė	5
1. Signalai ir sistemos	6
1.1. Įvadas	6
1.2. Signalai ir jų klasifikacija	6
1.3. Elementarieji signalai	12
1.4. Sistemos ir jų klasifikacija	18
1.5. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai	23
1.6. Uždaviniai	31
2. Tiesinės stacionariosios sistemos	39
2.1. Įvadas	39
2.2. TSS atsakas ir sąsūkos integralas	39
2.3. TSS savybės	43
2.4. TSS tikrinės funkcijos	45
2.5. Sistemų aprašymas diferencialinėmis lygtimis	46
2.6. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai	49
2.7. Uždaviniai	58
3. Laplaso transformacija ir TSS	65
3.1. Įvadas	65
3.2. Laplaso transformacija	65
3.3. Dažnai sutinkamų signalų Laplaso transformacijos	70
3.4. Laplaso transformacijos savybės	72
3.5. Atvirkštinė Laplaso transformacija	74
3.6. Sistemos funkcija	76
3.7. Vienpusė Laplaso transformacija	80
3.8. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai	83
3.9. Uždaviniai	93
4. Spektrinė tolydinių signalų ir sistemų analizė	101
4.1. Įvadas	101
4.2. Periodinių signalų vaizdavimas Furjė eilute	101
4.3. Furjė transformacija	103
4.4. Tolydinės Furjė transformacijos savybės	105

4.5. Dažninės TSS charakteristikos	108
4.6. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai	109
4.7. Uždaviniai	117
Literatūra.	129

PRATARMĖ

Signalų ir grandinių (arba sistemų bendruoju atveju) teorijos reikia beveik visose elektros ir elektronikos inžinerijos srityse, taip pat daugelyje kitų inžinerinių ir fundamentinių mokslų. Šios žinios sudaro tolimesnių specializuotų studijų, pavyzdžiui, automatikos ar telekomunikacijų inžinerijos, pagrindą.

Šis uždavinynas skirtas elektronikos inžinerijos studentams, studijuojantiems pirmosios pakopos dalykus „Signalai ir grandinės 1“ bei „Signalai ir grandinės 2“. Uždavinynas sumanytas kaip priedas prie vadovėlių ir mokomųjų knygų, naudojamų studijuojant teorinį kursą.

Uždavinyną sudaro keturi skyriai. Pirmajame skyriuje pateikiama signalų ir sistemų klasifikacija kartu su jų matematiniu aprašymu. Antrajame skyriuje apžvelgiami svarbiausi sąryšiai tarp įėjimo ir išėjimo signalų tiesinėse stacionariosiose sistemose, atskleidžiama tokių sistemų impulsinės charakteristikos sąvoka ir sąsukos operacijos esmė. Trečiajame skyriuje aiškinama, kaip taikyti Laplaso transformaciją nagrinėjant tolydines tiesines stacionarias sistemas. Ketvirtasis skyrius skirtas spektrinei tokių sistemų analizei.

Uždavinynas parengtas taip, kad būtų tinkamas ne tik kaip mokojoji priemonė pratyboms, bet ir praverstų studijuojant savarankiškai. Todėl dauguma uždavinynė pateiktų uždavinių turi atsakymus, kad studentai galėtų patikrinti gautus rezultatus. Studentų darbui palengvinti kiekviename uždavinyno skyriuje glaustai pateikiama teorinių žinių, reikalingų sprendžiant uždavinius, ir po keletą tipinių uždavinių sprendimo pavyzdžių. Kai kuriuose iš šių pavyzdžių parodyta, kaip naudoti MATLAB® paketą sprendžiant uždavinius. Ši informacija turėtų ypač praversti išvedant sistemos arba perdavimo funkciją ir braižant dažnines charakteristikas.

Darius Miniotas

1. SIGNALAI IR SISTEMOS

1.1. Įvadas

Sąvokų, apibūdinančių signalus ir sistemas, bei su šiomis sąvokomis susijusios teorijos reikia beveik visoms elektros inžinerijos sritims, taip pat daugeliui kitų taikomųjų ir fundamentinių mokslų disciplinų. Šiame skyriuje matematiškai aprašomi signalai ir sistemos bei pateikiama jų klasifikacija. Be to, apibrėžiama keletas svarbių elementariųjų signalų, būtinų tolimesnėms studijoms.

1.2. Signalai ir jų klasifikacija

Signalu vadinama funkcija, vaizduojanti fizikinį dydį arba kintamąjį, kuri perduoda informaciją apie tam tikro reiškinio eigą arba pobūdį. Pavyzdžiui, *RC* grandinėje signalu gali būti įtampa ant kondensatoriaus plokštelių arba rezistoriumi tekanti srovė. Matematiškai signalas vaizduojamas nepriklausomo kintamojo t , kuris paprastai išreiškia laiką, funkcija $x(t)$.

Tolydiniai ir diskretinamojo laiko signalai

Signalas $x(t)$ vadinamas *tolydiniu*, jei t – tolydinis kintamasis. Jei t – diskretusis kintamasis (t. y. $x(t)$ apibrėžta tik diskrečiais laiko momentais), tuomet $x(t)$ vadinamas *diskretinamojo laiko* signalu. Kadangi diskretinamojo laiko signalas apibrėžtas diskrečiais laiko momentais, jis dažnai tapatinamas su skaičių seka $x(n)$, kurioje n – sveikasis skaičius. Tolydinio signalo pavyzdys pateiktas 1.1 a pav., o diskretinamojo laiko signalo – 1.1 b pav. Šiame uždavinyne diskretinamojo laiko signalai nebus nagrinėjami.

Analginiai ir skaitmeniniai signalai

Jei tolydinis signalas $x(t)$ gali turėti bet kurią vertę, priklausančią tolydžiajam intervalui (a, b) , kuriame a gali būti $-\infty$, o b gali būti $+\infty$, jis vadinamas *analoginiu*. Jei diskretinamojo laiko signalas $x(n)$ gali turėti tik baigtinį verčių skaičių, jis vadinamas *skaitmeniniu*.

a)

b)

1.1 pav. Tolydinis (a) ir diskretinamojo laiko (b) signalai

Realieji ir kompleksiniai signalai

Signalas $x(t)$ yra *realusis*, jei jo vertė – realusis skaičius. Kita vertus, jei signalo vertė – kompleksinis skaičius, toks signalas vadi-

namas kompleksiniu. Bendruoju atveju kompleksinis signalas $x(t)$ yra tokios išraiškos funkcija:

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t), \quad (1.1)$$

čia $x_1(t)$ ir $x_2(t)$ – realieji signalai, o $j = \sqrt{-1}$.

Determinuotieji ir atsitiktiniai signalai

Determinuotaisiais signalais vadinami tokie, kurių visos vertės apibrėžtos bet kuriuo laiko momentu. Taigi determinuotąjį signalą galima modeliuoti žinoma laiko t funkcija. *Atsitiktiniais* signalais vadinami tokie, kurių vertės bet kuriuo laiko momentu – atsitiktiniai skaičiai. Tokie signalai apibūdinami statistiškai. Šiame uždavinyne atsitiktiniai signalai nebus nagrinėjami.

Lyginiai ir nelyginiai signalai

Signalas $x(t)$ vadinamas *lyginiu*, jei

$$x(-t) = x(t). \quad (1.2)$$

Signalas $x(t)$ vadinamas *nelyginiu*, jei

$$x(-t) = -x(t). \quad (1.3)$$

Lyginio signalo pavyzdys pateiktas 1.2 a pav., o nelyginio – 1.2 b pav.

Bet kurį signalą $x(t)$ galima išreikšti dviejų signalų, iš kurių vienas – lyginis, o kitas – nelyginis, suma, t. y.

$$x(t) = x_l(t) + x_n(t), \quad (1.4)$$

čia $x_l(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$ lyginė $x(t)$ dalis,
 $x_n(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$ nelyginė $x(t)$ dalis.

Pažymėtina, kad dviejų lyginių arba dviejų nelyginių signalų sandauga yra lyginis signalas, o lyginio ir nelyginio signalų sandauga – nelyginis signalas.

1.2 pav. Lyginis (a) ir nelyginis (b) signalai

Periodiniai ir neperiodiniai signalai

Tolydinis signalas $x(t)$ vadinamas *periodiniu* signalu, kurio periodas – T , jei egzistuoja teigiama nenulinė T vertė, kuriai galioja

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{visoms } t. \quad (1.5)$$

Tokio signalo pavyzdys pateiktas 1.3 pav. Iš (1.5) matyti, kad

$$x(t + mT) = x(t) \quad (1.6)$$

visoms t vertėms ir bet kuriam sveikajam skaičiui m . Pagrindiniu $x(t)$ periodu T_0 laikoma mažiausia teigiama T vertė, kuriai galioja (1.5) lygybė. Pažymėtina, kad šis apibrėžimas negalioja pastoviam signalui $x(t)$ (žinomam kaip nuolatinės srovės signalas). Tokiam signalui pagrindinis periodas neapibrėžtas, nes $x(t)$ – periodinis, esant bet kokiam T (todėl nebūna mažiausios teigiamos vertės). Bet kuris tolydinis signalas, kuris nėra periodinis, vadinamas *neperiodiniu* (arba *aperiodiniu*) signalu.

1.3 pav. Periodinis signalas

Pažymėtina, kad dviejų tolydinių periodinių signalų suma gali būti ir neperiodinis signalas (1.13 uždavinys).

Energijos ir galios signalai

Tarkime, kad $v(t)$ – įtampos kritimas ant rezistoriaus R , lemiantis srovę $i(t)$, Vienam omui tenkanti momentinė galia $p(t)$ apibrėžiama taip:

$$p(t) = \frac{v(t) i(t)}{R} = i^2(t). \quad (1.7)$$

Vienam omui tenkanti pilnutinė energija E ir vidutinė galia P atitinkamai lygios:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt \quad [\text{J}], \quad (1.8)$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i^2(t) dt \quad [\text{W}]. \quad (1.9)$$

Bet kokiam tolydiniam signalui $x(t)$ jo normuotoji energija apibrėžiama taip:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (1.10)$$

Bet kokiam tolydiniam signalui $x(t)$ jo normuotoji vidutinė galia apibrėžiama taip:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt. \quad (1.11)$$

Remiantis (1.10) ir (1.11) išraiškomis, apibrėžiamos tokios signalų klasės:

1. $x(t)$ vadinamas energijos signalu tada ir tik tada, kai $0 < E < \infty$, todėl $P = 0$.
2. $x(t)$ vadinamas galios signalu tada ir tik tada, kai $0 < P < \infty$. O tai reiškia, kad $E = \infty$.

3. Nei vienos iš šių savybių netenkinantys signalai priskiriami signalų, nepriklausančių nei energijos, nei galios signalams, klasei.

Pažymėtina, kad periodinis signalas priklauso galios signalų klasei, jei periodo ribose jo energija yra baigtinė. Tuomet vidutinei šio signalo galiai rasti pakanka skaičiuoti vieną periodą.

1.3. Elementarieji signalai

Vienetinė laiptinė funkcija

Vienetinė laiptinė funkcija $u(t)$, dar žinoma kaip Hevisaido funkcija, apibrėžiama taip:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}. \quad (1.12)$$

Ši funkcija pavaizduota 1.4 a pav. Iš funkcijos grafiko matyti, kad ji turi trūkį laiko momentu $t = 0$. Kitaip tariant, funkcijos vertė momentu $t = 0$ yra neapibrėžta. Panašiai apibrėžiama ir perstumta vienetinė laiptinė funkcija $u(t - t_0)$:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}. \quad (1.13)$$

Šios funkcijos grafikas pateiktas 1.4 b pav.

1.4 pav. Vienetinė laiptinė (a) ir perstumta vienetinė laiptinė (b) funkcijos

Vienetinė impulsinė funkcija

Vienetinė impulsinė funkcija $\delta(t)$, dar žinoma kaip delta (Dirako) funkcija, atlieka svarbų vaidmenį analizuojant sistemas. Ji apibrėžiama taip:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}. \quad (1.14)$$

Ši funkcija unikali tuo, kad jos plotas be galo mažame laiko intervale lygus 1. Matematiškai ši savybė užrašoma taip:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.15)$$

Vienetinę impulsinę funkciją grafiškai priimta vaizduoti, kaip parodyta 1.5 a pav.

Perstumta vienetinė impulsinė funkcija $\delta(t-t_0)$ apibrėžiama taip:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases}. \quad (1.16)$$

Šios funkcijas grafikas pateiktas 1.5 b pav.

1.5 pav. Vienetinė impulsinė (a) ir perstumta vienetinė impulsinė (b) funkcijas

Vienetinei impulsinei funkcijai būdingos dar šios savybės:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad (1.17)$$

$$\delta(-t) = \delta(t), \quad (1.18)$$

$$x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t), \quad (1.19)$$

jei $x(t)$ tolydi momentu $t = 0$.

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0), \quad (1.20)$$

jei $x(t)$ tolydi momentu $t = t_0$.

Remiantis vienetinės impulsinės funkcijos savybėmis, galima įrodyti, kad bet kuriam tolydiniam signalui $x(t)$ galioja tokia lygtis:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.21)$$

Kompleksinės eksponentės signalai

Svarbus kompleksinio signalo pavyzdys yra kompleksinės eksponentės signalas:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}. \quad (1.22)$$

Naudojant Eulerio formulę, šį signalą galima apibrėžti taip:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t. \quad (1.23)$$

a)

b)

1.6 pav. Eksponentiškai didėjantis (a) ir mažėjantis (b) sinusiniai signalai

Taigi $x(t)$ – tai kompleksinis signalas, turintis realiąją dalį $\cos \omega_0 t$ ir menamąją dalį $\sin \omega_0 t$. Svarbi kompleksinės eksponentės signalo savybė yra jo periodiškumas. Pagrindinis $x(t)$ periodas T_0 apibrėžiamas taip (1.11 uždavinys):

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (1.24)$$

Pažymėtina, kad $x(t)$ būna periodinis, esant bet kuriai ω_0 vertei.

Tarkime, kad duotas kompleksinis skaičius $s = \sigma + j\omega$. Apibrėžkime $x(t)$ kaip

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t). \quad (1.25)$$

Toks signalas vadinamas bendriniu kompleksinės eksponentės signalu. Jo realioji dalis $e^{\sigma t} \cos \omega t$ ir menamoji dalis $e^{\sigma t} \sin \omega t$ yra eksponentiškai didėjantys ($\sigma > 0$) arba mažėjantys ($\sigma < 0$) sinusiiniai signalai (1.6 pav.).

1.7 pav. Realieji eksponentiniai signalai, kai (a) $\sigma > 0$ ir (b) $\sigma < 0$

Jei $s = \sigma$ (realusis skaičius), (1.25) lygybė aprašo realųjį eksponentinį signalą

$$x(t) = e^{\sigma t}. \quad (1.26)$$

Kaip matyti iš 1.7 pav., $x(t)$ yra didėjanti eksponentė, jei $\sigma > 0$. Kita vertus, jei $\sigma < 0$, $x(t)$ – mažėjanti eksponentė.

Sinusiniai signalai

Sinusinį signalą galima užrašyti taip:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta), \quad (1.27)$$

čia: A – amplitudė (realusis skaičius), ω_0 – kampinis dažnis radianais per sekundę, θ – fazės kampas radianais. Sinusinis signalas $x(t)$ yra periodinis, jo pagrindinis periodas:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (1.28)$$

Šis signalas $x(t)$ pavaizduotas 1.8 pav. Pagrindiniam periodui T_0 atvirkščias dydis vadinamas pagrindiniu dažniu f_0 :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad \text{Hz}. \quad (1.29)$$

Remiantis (1.28) ir (1.29) lygybėmis,

$$\omega_0 = 2\pi f_0. \quad (1.30)$$

Šis dydis vadinamas pagrindiniu kampiniu dažniu. Naudojant Eulerio formulę, (1.27) lygybę galima perrašyti taip:

$$A \cos(\omega_0 t + \theta) = A \operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\}. \quad (1.31)$$

Tuomet

$$A \operatorname{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\} = A \sin(\omega_0 t + \theta). \quad (1.32)$$

1.8 pav. Sinusinis signalas

1.4. Sistemos ir jų klasifikacija

Sistemų vaizdavimas

Sistema – tai matematinis fizinio proceso modelis, susiejantis tarpusavyje įėjimo (arba žadinimo) ir išėjimo (arba atsako) signalus.

Tarkime, kad x ir y yra atitinkamai sistemos įėjimo ir išėjimo signalai. Tuomet sistemą galima traktuoti kaip x transformavimą į y . Ši transformacija matematiškai užrašoma taip:

$$y = \mathbf{T} x, \quad (1.33)$$

čia $\mathbf{T}$ – operatorius, aprašantis tam tikrą gerai apibrėžtą taisyklę, pagal kurią x transformuojamas į y . (1.33) sąryšis grafiškai pavaizduotas 1.9 a pav. Bendroju atveju sistema gali turėti keletą įėjimo ir (arba) išėjimo signalų, kaip parodyta 1.9 b pav. Tačiau šiame už-

davinyne apsiribosime paprasčiausiomis sistemomis, turinčiomis tik vieną įėjimą ir vieną išėjimą.

1.9 pav. Sistema su vienu (a) arba keletu (b) įėjimo ir išėjimo signalų

Tolydžiojo ir diskretinamojo laiko sistemos

Jei įėjimo ir išėjimo signalai x ir y yra tolydiniai signalai, tokia sistema vadinama tolydžiojo laiko (tolydine) sistema (1.10 a pav.). Jei įėjimo ir išėjimo signalai yra diskretinamojo laiko signalai (sekos), tokia sistema vadinama diskretinamojo laiko sistema (1.10 b pav.).

1.10 pav. Tolydžiojo laiko (a) ir diskretinamojo laiko (b) sistemos

Statinės ir dinaminės sistemos

Sistema laikoma statine, jei jos išėjimo signalas bet kuriuo laiko momentu priklauso tik nuo įėjimo signalo vertės tuo pačiu laiko

momentu. Priešingu atveju sistema yra dinaminė. Statinės sistemos pavyzdys – rezistorius R , kurio įėjimo signalu $x(t)$ laikoma srovė, o išėjimo signalu $y(t)$ – įtampa. Sąryšį tarp rezistoriaus įėjimo ir išėjimo signalų nusako Omo dėsnis:

$$y(t) = R x(t). \quad (1.34)$$

Dinaminės sistemos pavyzdys – kondensatorius C , kurio įėjimo signalu $x(t)$ laikoma srovė, o išėjimo signalu $y(t)$ – įtampa. Tuomet

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau. \quad (1.35)$$

Priežastinės ir nepriežastinės sistemos

Sistema vadinama priežastine, jei jos išėjimo signalas $y(t)$ bet kuriuo laiko momentu $t = t_0$ priklauso tik nuo įėjimo signalo $x(t)$ verčių, atitinkančių intervalą $t \leq t_0$. Kitaip tariant, priežastinės sistemos išėjimo signalas esamuju momentu priklauso tik nuo įėjimo signalo verčių esamuju ir (arba) ankstesniaisiais laiko momentais, bet ne nuo jo verčių ateityje. Taigi esant priežastinei sistemai išėjimo signalas negali atsirasti anksčiau nei į ją paduodamas įėjimo signalas. Priešingu atveju sistema yra nepriežastinė. Nepriežastinės sistemos pavyzdys:

$$y(t) = x(t + 1). \quad (1.35)$$

Pažymėtina, kad visos statinės sistemos yra priežastinės. O priešingas teiginys negalioja.

Tiesinės ir netiesinės sistemos

Jei (1.33) lygtyje nurodytas operatorius $\mathbf{T}$ tenkina toliau suformuluotas adityvumo ir homogeniškumo sąlygas, jis vadinamas tiesiniu operatoriumi, o tokiu operatoriumi vaizduojama sistema – tiesine sistema.

Adityvumas: jei teisingos lygybės $\mathbf{T} x_1 = y_1$ ir $\mathbf{T} x_2 = y_2$, tai bet kokiems signalams x_1 ir x_2 galioja:

$$\mathbf{T} \{x_1 + x_2\} = y_1 + y_2. \quad (1.36)$$

Homogeniškumas: bet kokiam signalui x ir bet kokiam skaliariui α galioja:

$$\mathbf{T} \{\alpha x\} = \alpha y. \quad (1.37)$$

Bet kuri sistema, netenkinanti kurios nors iš pastarųjų dviejų lygčių, laikoma netiesine. (1.36) ir (1.37) lygtis galima sujungti į vieną sąlygą:

$$\mathbf{T} \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \quad (1.38)$$

čia α_1 ir α_2 – bet kokie skaliariai. (1.38) lygtis dar žinoma kaip superpozicijos savybė. Tiesinių sistemų pavyzdžiai – rezistorius [(1.34) lygtis] ir kondensatorius [(1.35) lygtis]. Netiesinių sistemų pavyzdžiai:

$$y = x^2, \quad (1.39)$$

$$y = \cos x. \quad (1.40)$$

Tiesinių sistemų homogeniškumo savybė lemia, kad nulinis įėjimo signalas sąlygoja nulinį išėjimo signalą. Tai yra dar viena svarbi tiesinių sistemų savybė.

Stacionariosios ir nestacionariosios sistemos

Sistema vadinama stacionariaja, jei jos įėjimo signalo postūmis tam tikru laiku (vėlinimas arba ankstinimas) lemia tokį patį išėjimo signalo postūmį. Matematinio požiūriu sistema yra stacionarioji, jei bet kuriai realiajai τ vertei galioja:

$$\mathbf{T} \{x(t - \tau)\} = y(t - \tau). \quad (1.41)$$

Sistema, netenkinanti (1.41) lygties, vadinama nestacionariaja. Norint patikrinti sistemos stacionarumą, galima palyginti perstumtą išėjimo signalą su išėjimo signalu, kurį lemia perstumto įėjimo signalas (1.4 ir 1.5 uždaviniai).

Stabiliosios sistemos

Sistema yra stabilioji, jei bet kokią apribotąjį įėjimo signalą x , apibrėžiamą kaip

$$|x| \leq k_1, \quad (1.42)$$

atitinka apribotasis išėjimo signalas

$$|y| \leq k_2, \quad (1.43)$$

čia k_1 ir k_2 – baigtinės realiosios konstantos.

Sistemos su grįžtamoju ryšiu

Šios sistemos yra labai svarbios ir priklauso atskirai sistemų klasei. Sistemos su grįžtamoju ryšiu išėjimo signalas grąžinamas į įėjimą ir pridamas prie sistemos įėjimo signalo, kaip pavaizduota 1.11 pav.

1.11 pav. Sistema su grįžtamoju ryšiu

1.5. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1.1. Nustatykite, kuriai kategorijai priklauso šie signalai: energijos signalų, galios signalų ar nei vienų, nei kitų.

- (a) $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$;
- (b) $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$;
- (c) $x(t) = tu(t)$.

Sprendimas

$$(a) E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} < \infty.$$

Taigi $x(t)$ yra energijos signalas.

(b) Sinusinis signalas $x(t)$ yra periodinis, nes turi periodą $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Vidutinė $x(t)$ galia skaičiuojama taip:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [x(t)]^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt \\
 &= \frac{A^2 \omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)] dt = \frac{A^2}{2} < \infty.
 \end{aligned}$$

Taigi $x(t)$ – galios signalas. Dera atminti, kad visi periodiniai signalai yra galios signalai.

$$(c) E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T/2} t^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty,$$

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} t^2 dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty.
 \end{aligned}$$

Taigi $x(t)$ nėra nei energijos, nei galios signalas.

1.2. Raskite pirmąsias šių signalų išvestines ir nubraižykite jų grafikus:

$$(a) x(t) = u(t) - u(t - a), \quad a > 0;$$

$$(b) x(t) = t[u(t) - u(t - a)], \quad a > 0;$$

$$(c) x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}.$$

Sprendimas

(a) Kadangi $u'(t) = \delta(t)$, tai $u'(t - a) = \delta(t - a)$. Tuomet

$$x'(t) = u'(t) - u'(t - a) = \delta(t) - \delta(t - a).$$

Signalai $x(t)$ ir $x'(t)$ pavaizduoti 1.12a pav..

1.12 pav.

(b) Pasinaudojus dviejų funkcijų sandaugos diferencijavimo savybe ir (a) dalyje gautu rezultatu, galima užrašyti:

$$x'(t) = [u(t) - u(t - a)] + t[\delta(t) - \delta(t - a)].$$

Tačiau remiantis (1.19) ir (1.20) lygtimis,

$$t \delta(t) = (0) \delta(t) = 0, \quad t \delta(t - a) = a \delta(t - a).$$

Taigi

$$x'(t) = u(t) - u(t - a) - a \delta(t - a).$$

Signalai $x(t)$ ir $x'(t)$ pavaizduoti 1.12 b pav.

(c) Signalą $x(t)$ galima perrašyti taip:

$$x(t) = u(t) - u(-t).$$

Tuomet

$$x'(t) = u'(t) - u'(-t) = \delta(t) - [-\delta(t)] = 2\delta(t).$$

Signalai $x(t)$ ir $x'(t)$ pavaizduoti 1.12 c pav.

1.3. Raskite sąryšį tarp 1.13 pav. pavaizduotos RC grandinės įėjimo signalo $x(t)$ ir išėjimo signalo $y(t)$, jei:

(a) $x(t) = v_s(t), \quad y(t) = v_c(t);$

(b) $x(t) = v_s(t), \quad y(t) = i(t).$

1.13 pav.

Sprendimas

(a) Pritaikius antrąją Kirchhofo dėsnį 1.13 pav. pavaizduotai RC grandinei, galima užrašyti:

$$v_s(t) = R i(t) + v_c(t). \quad (1.44)$$

Srovė $i(t)$ ir įtampa $v_c(t)$ susietos sąryšiu:

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}. \quad (1.45)$$

Užrašius tapatybes $v_s(t) = x(t)$, $v_c(t) = y(t)$ ir įstačius (1.45) lygtį į (1.44),

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t).$$

Tai galima perrašyti taip:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t). \quad (1.46)$$

Taigi šios RC grandinės išėjimo signalo priklausomybę nuo įėjimo signalo aprašo pirmosios eilės tiesinė diferencialinė lygtis su pastoviais koeficientais.

(b) Integruojant (1.45) lygtį,

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau. \quad (1.47)$$

Įstačius (1.47) lygtį į (1.44) ir užrašius tapatybes $v_s(t) = x(t)$, $i(t) = y(t)$, gaunama tokia išraiška:

$$R y(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = x(t).$$

Tai galima perrašyti taip:

$$y(t) + \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = \frac{1}{R} x(t).$$

Diferencijuojant abi šios lygties puses laiko atžvilgiu,

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{R} \frac{dx(t)}{dt}. \quad (1.48)$$

Kaip matome, išėjimo signalo priklausomybę nuo įėjimo signalo aprašo kita pirmosios eilės tiesinė diferencialinė lygtis su pastoviais koeficientais.

1.4. Tarkime, kad 1.14 pav. pavaizduoto kondensatoriaus įėjimo signalas $x(t) = i(t)$, o išėjimo signalas $y(t) = v_c(t)$.

(a) Raskite sąryšį tarp įėjimo ir išėjimo signalų.

(b) Nustatykite, ar sistema yra: dinaminė, priežastinė, tiesinė, stacionarioji, stabilioji.

1.14 pav.

Sprendimas

(a) Laikykime, kad kondensatoriaus talpa C – pastovus dydis. Kondensatoriaus išėjimo signalas $y(t)$ ir įėjimo signalas $x(t)$ susieti (1.47) lygtimi:

$$y(t) = \mathbf{T} \{x(t)\} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau. \quad (1.49)$$

(b) Iš (1.49) lygties matyti, kad išėjimo signalas $y(t)$ priklauso nuo esamosios ir ankstesniųjų įėjimo signalo verčių. Taigi ši sistema yra dinaminė. Kadangi išėjimo signalas $y(t)$ nepriklauso nuo būsimųjų įėjimo signalo verčių, sistema yra priežastinė.

Tarkime, kad $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$. Tuomet

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathbf{T} \{x(t)\} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t [\alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau)] d\tau \\
&= \alpha_1 \left[\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau \right] + \alpha_2 \left[\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \right] = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t).
\end{aligned}$$

Kadangi superpozicijos savybė (1.38) tenkinama, sistema yra tiesinė.

Tarkime, kad $y_1(t)$ yra išėjimo signalas, kurį lemia perstumto įėjimo signalas $x_1(t) = x(t - t_0)$. Tuomet

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \mathbf{T} \{x(t - t_0)\} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau \\
&= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda) d\lambda = y(t - t_0).
\end{aligned}$$

Taigi sistema yra stacionarioji.

Tarkime, kad $x(t) = k_1 u(t)$, kai $k_1 \neq 0$. Tuomet

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t k_1 u(\tau) d\tau = \frac{k_1}{C} \int_0^t d\tau = \frac{k_1}{C} t u(t). \quad (1.50)$$

Kaip matyti iš šios funkcijos grafiko (1.15 pav.), laikui bėgant $y(t)$ didėja tiesiškai be apribojimo. Todėl sistema nėra stabilioji.

1.15 pav.

1.5. Nustatykite, ar 1.16 pav. pavaizduota sistema yra: (a) dinaminė, (b) priežastinė, (c) tiesinė, (d) stacionarioji, (e) stabilioji.

1.16 pav.

(a) Iš 1.16 pav. matyti, kad:

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = x(t) \cos \omega_c t.$$

Kadangi išėjimo signalo $y(t)$ vertė priklauso tik nuo įėjimo signalo $x(t)$ vertės esamuojų momentu, sistema nėra dinaminė.

(b) Kadangi išėjimo signalas $y(t)$ nepriklauso nuo būsimųjų įėjimo signalo verčių, sistema yra priežastinė.

(c) Tarkime, kad $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ Tuomet

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T} \{x(t)\} = [\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] \cos \omega_c t \\ &= \alpha_1 x_1(t) \cos \omega_c t + \alpha_2 x_2(t) \cos \omega_c t = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t). \end{aligned}$$

Kadangi superpozicijos savybė (1.38) tenkinama, sistema yra tiesinė.

(d) Tarkime, kad $y_1(t)$ yra išėjimo signalas, kurį lemia perstumto įėjimo signalas $x_1(t) = x(t - t_0)$. Tuomet

$$y_1(t) = \mathbf{T} \{x(t - t_0)\} = x(t - t_0) \cos \omega_c t.$$

Tačiau

$$y(t - t_0) = x(t - t_0) \cos \omega_c (t - t_0) \neq y_1(t).$$

Taigi sistema nėra stacionarioji.

(e) Kadangi $|\cos \omega_c t| \leq 1$, galima užrašyti:

$$|y(t)| = |x(t) \cos \omega_c t| \leq |x(t)|.$$

Taigi, esant apribotam įėjimo signalui $x(t)$, išėjimo signalas $y(t)$ irgi yra apribotas. Todėl sistema yra stabilioji.

1.6. Uždaviniai

1.6. 1.17 pav. pavaizduotas tolydinis signalas $x(t)$. Nubrėžkite šių signalų grafikus: (a) $x(t - 2)$; (b) $x(2t)$; (c) $x(t/2)$; (d) $x(-t)$.

Ats. Žr. 1.18 pav.

1.17 pav.

a)

b)

c)

d)

1.18 pav.

1.7. Nubraižykite nelygines ir lygines 1.19 pav. pavaizduoto signalo dedamąsias.

Ats. Žr. 1.20 pav.

1.19 pav.

1.20 pav.

1.8. Raskite signalo $x(t) = e^{jt}$ lyginę ir nelyginę dedamąsias.

Ats. $x_l(t) = \cos t$, $x_n(t) = j \sin t$.

1.9. Įrodykite, kad dviejų lyginių arba dviejų nelyginių signalų sandauga yra lyginis signalas, o nelyginio ir lyginio signalų sandauga – nelyginis signalas.

1.10. Įrodykite, kad lyginiam signalui $x(t)$ galioja:

$$\int_{-a}^a x(t) dt = 2 \int_0^a x(t) dt,$$

o nelyginiam signalui –

$$\int_{-a}^a x(t) dt = 0.$$

1.11. Įrodykite, kad kompleksinės eksponentės signalas

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

yra periodinė funkcija, kurios periodas lygus $2\pi/\omega_0$.

1.12. Įrodykite, kad sinusinis signalas

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

yra periodinė funkcija, kurios periodas lygus $2\pi/\omega_0$.

1.13. Tarkime, kad $x_1(t)$ ir $x_2(t)$ yra periodiniai signalai, kurių periodai atitinkamai lygūs T_1 ir T_2 . Kokiomis sąlygomis šių signalų suma $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ irgi yra periodinis signalas? Jei $x(t)$ – periodinis, koks yra jo periodas?

1.14. Nustatykite, ar šie signalai yra periodiniai, ir jei taip, raskite jų periodą.

(a) $x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right);$

(b) $x(t) = \sin \frac{2\pi}{3} t;$

(c) $x(t) = \cos \frac{\pi}{3} t + \sin \frac{\pi}{4} t;$

(d) $x(t) = \cos t + \sin \sqrt{2} t;$

(e) $x(t) = \sin^2 t;$

(f) $x(t) = e^{j[(\pi/2)t-1]}.$

- Ats. (a) periodinis, $T_0 = 2\pi$; (b) periodinis, $T_0 = 3$;
 (c) periodinis, $T_0 = 24$; (d) neperiodinis;
 (e) periodinis, $T_0 = \pi$; (f) periodinis, $T_0 = 4$.

1.15. Įrodykite, kad signalui, kuriam galioja $x(t+T) = x(t)$, teisingos ir šios dvi lygybės:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(t) dt;$$

$$\int_0^T x(t) dt = \int_0^{a+T} x(t) dt.$$

Čia α , β ir a – bet kokie realieji skaičiai.

1.16. Įrodykite, kad

$$u(-t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}.$$

1.17. 1.21 pav. pavaizduotas tolydinis signalas $x(t)$. Nubrėžkite šių signalų grafikus:

- (a) $x(t) u(1-t)$;
 (b) $x(t)[u(t) - u(t-1)]$;
 (c) $x(t) \delta\left(t - \frac{3}{2}\right)$.

1.21 pav.

1.18. Vienetinio šuolio funkciją $u(t)$ galima apibrėžti kaip apibendrintą funkciją, naudojant tokį sąryšį:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) u(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t) dt ,$$

čia $\phi(t)$ – pagalbinė funkcija, integruojama intervale $0 < t < \infty$. Naudodami šį apibrėžimą, įrodykite, kad

$$u(-t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

1.19. Įrodykite, kad

$$(a) \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t);$$

$$(b) \delta(-t) = \delta(t).$$

1.20. Įrodykite, kad

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0),$$

jei $x(t)$ yra tolydi taške $t = t_0$.

1.21. Įrodykite, kad

$$x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t),$$

jei $x(t)$ yra tolydi taške $t = 0$.

1.22. Įrodykite, kad

(a) $t \delta(t) = 0$;

(b) $\sin t \delta(t) = 0$;

(c) $\cos t \delta(t - \pi) = -\delta(t - \pi)$.

1.23. Įrodykite, kad

(a) $\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{d(t)}$.

1.24. Įrodykite, kad $\delta(t)$ išvestinei galioja šios savybės:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta'(t) dt = -\phi'(0),$

čia $\phi'(0) = \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=0};$

(b) $t \delta'(t) = -\delta(t).$

1.25. Apskaičiuokite šiuos integralus:

(a) $\int_{-1}^1 (3t^2 + 1) \delta(t) dt;$

(b) $\int_1^2 (3t^2 + 1) \delta(t) dt;$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \cos \pi t) \delta(t-1) dt;$$

$$(d) \int_{-1}^1 e^{-t} \delta(2t-2) dt;$$

$$(e) \int_{-1}^1 e^{-t} \delta'(t) dt.$$

Ats. (a) 1; (b) 0; (c) 0; (d) $\frac{1}{2e}$; (e) 1.

1.26. Turime sistemą, kurios įėjimo ir išėjimo signalai susieti tokiu sąryšiu:

$$y = \mathbf{T}\{x\} = x^2.$$

Įrodykite, kad tokia sistema yra netiesinė.

1.27. (a) Įrodykite, kad tolydinės tiesinės sistemos priežastinumo savybė patvirtina tokį teiginį: bet kokiam įėjimo signalui $x(t)$, kuriam bet kuriuo laiko momentu galioja $x(t) = 0$, kai $t \leq t_0$, išėjimo signalas $y(t)$ irgi lygus nuliui, kai $t \leq t_0$.

(b) Pateikite pavyzdį netiesinės sistemos, kuri būtų priežastinė, tačiau netenkintų minėtos sąlygos.

(c) Pateikite pavyzdį netiesinės sistemos, kuri tenkintų minėtą sąlygą, tačiau nebūtų priežastinė.

1.28. Tarkime, kad $\mathbf{T}$ išreiškia tolydinę tiesinę stacionariąją sistemą. Įrodykite, kad tokiai sistemai galioja:

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = \lambda e^{st},$$

čia s – kompleksinis kintamasis, λ – kompleksinė konstanta.

2. TIESINĖS STACIONARIOSIOS SISTEMOS

2.1. Įvadas

Dvi pačios svarbiausios sistemų savybės yra jų tiesiškumas ir stacionarumas. Šiame skyriuje aptarsime, kaip randamas šiomis savybėmis pasižyminčių sistemų atsakas į žinomos formos įėjimo signalą. Kaip matysime, TSS atsako priklausomybę nuo jos įėjime veikiančio signalo apibūdina sąsūkos operacija. Šios operacijos svarbą lemia tai, kad, žinant TSS atsaką į vienetinę impulsinę funkciją, galima rasti tokios sistemos atsaką į bet koki įėjimo signalą. Šiame skyriuje taip pat aptarsime, kaip naudoti diferencialines lygtis sąryšiams tarp TSS įėjimo ir išėjimo signalų aprašyti.

2.2. TSS atsakas ir sąsūkos integralas

Impulsinė charakteristika

Impulsinė tolydinės TSS (vaizduojamos operatoriumi $\mathbf{T}$) charakteristika $h(t)$ apibrėžiama kaip sistemos atsakas į vienetinę impulsinę funkciją:

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\}. \quad (2.1)$$

Atsakas į bet koki įėjimo signalą

Remiantis (1.21) lygtimi, įėjimo signalą $x(t)$ galima užrašyti taip:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Kadangi sistema tiesinė, jos atsaką $y(t)$ į bet koki įėjimo signalą galima aprašyti taip:

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathbf{T}\{\delta(t - \tau)\} d\tau. \quad (2.3)$$

Kadangi sistema stacionarioji, galima užrašyti:

$$h(t - \tau) = \mathbf{T}\{\delta(t - \tau)\}. \quad (2.4)$$

Įstačius (2.4) lygtį į (2.3),

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (2.5)$$

Kaip rodo (2.5) lygtis, tolydinę TSS visiškai apibūdina jos impulsinė charakteristika $h(t)$.

Sąsūkos integralas

(2.5) lygtis apibrėžia dviejų tolydinių signalų $x(t)$ ir $h(t)$ sąsūką, žymimą žvaigždutės simboliu:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (2.6)$$

(2.6) lygtį priimta vadinti sąsūkos integralu. Taigi gavome labai svarbų rezultatą: bet kokios tolydinės TSS išėjimo signalas – tai įėjimo signalo $x(t)$ ir sistemos impulsinės charakteristikos $h(t)$ sąsūka. Ši impulsinės charakteristikos $h(t)$ apibrėžimą ir (2.6) lygtimi aprašomą sąryšį vaizduoja 2.1 pav.

2.1 pav. Tolydinė tiesinė stacionarioji sistema

Sąsūkos integralo savybės

Sąsūkos integralui būdingos tokios savybės:

- perstatomumas

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t), \quad (2.7)$$

- jungiamumas

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}, \quad (2.8)$$

- skirstomumas

$$x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t). \quad (2.9)$$

Sąsūkos integralo operacija

Pritaikius perstatomumo savybę 2.6 lygčiai,

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (2.10)$$

Kartais ši integralą būna lengviau apskaičiuoti nei tą, kuris aprašomas 2.6 lygtimi. Iš pastarosios lygties matyti, kad sąsūkos integralo operaciją sudaro keturi etapai:

1. Impulsinė charakteristika $h(\tau)$ apverčiama tam tikru laiku (t. y. apgręžiama koordinačių pradžios atžvilgiu), taip gaunant $h(-\tau)$. Šią perstūmus intervalu t , gaunama $h(t - \tau) = h[-(\tau - t)]$, kuri yra τ funkcija su parametru t .
2. Signalas $x(\tau)$ ir $h(t - \tau)$ dauginami visoms τ vertėms, esant fiksuotai t vertei.
3. Sandauga $x(\tau)h(t - \tau)$ integruojama visame τ verčių diapazone, taip gaunant vieną išėjimo signalo $y(t)$ vertę.
4. Norint gauti visas išėjimo signalo $y(t)$ vertes, pirmieji trys etapai kartojami, t kintant nuo $-\infty$ iki ∞ .

Aprašytąją sąsūkos integralo operaciją iliustruojantys pavyzdžiai pateikti 2.1, 2.9 ir 2.10 uždaviniuose.

Šuolinis atsakas

Tolydinės TSS šuolinis atsakas $s(t)$ – tai sistemos atsakas į įėjimo signalą $u(t)$:

$$s(t) = \mathbf{T} \{u(t)\}. \quad (2.11)$$

Atliekant daugelį taikymų šuolinis atsakas $s(t)$ irgi būna naudingas sistemai apibūdinti. Šuolinį atsaką nesunku rasti iš (2.10) lygties:

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

Taigi šuolinį atsaką $s(t)$ galima rasti integruojant impulsinę charakteristiką $h(t)$. Diferencijuojant (2.12) lygtį laiko atžvilgiu,

$$h(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}. \quad (2.13)$$

Tokiu būdu impulsinę charakteristiką $h(t)$ galima rasti diferencijuojant šuolinį atsaką.

2.3. TSS savybės

Statinės ir dinaminės sistemos

Kadangi statinės sistemos išėjimo signalas $y(t)$ priklauso tik nuo įėjimo signalo $x(t)$ vertės esamuoju momentu, tai TSS atveju šis sąryšis gali būti tik toks:

$$y(t) = K x(t), \quad (2.14)$$

čia K – konstanta. Taigi impulsinė charakteristika $h(t)$ atitinkamai lygi:

$$h(t) = K \delta(t). \quad (2.15)$$

Todėl, jei $h(t_0) \neq 0$, kai $t_0 \neq 0$, tolydinė TSS yra dinaminė.

Priežastingumas

Kaip jau buvo aptarta 1.4 poskyryje, priežastinė sistema nereaguoja į kokį nors įvykį savo įėjime tol, kol tas įvykis iš tikrųjų neįvyksta. Todėl priežastinei tolydinei TSS galioja:

$$h(t) = 0, \quad t < 0. \quad (2.16)$$

(2.10) lygčiai pritaikius priežastingumo sąlygą (2.16), priežastinės tolydinės TSS išėjimo signalas išreiškiamas taip:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (2.17)$$

O pritaikius priežastingumo sąlygą (2.6) lygčiai, gaunama:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Kaip matyti iš (2.18) lygties, išėjimo signalui $y(t)$ rasti reikalingos tik tos įėjimo signalo $x(t)$ vertės, kurioms galioja nelygybė: $\tau \leq t$.

Remiantis priežastingumo sąlyga (2.16), bet koks signalas $x(t)$ vadinamas priežastiniu, jei

$$x(t) = 0, \quad t < 0. \quad (2.19a)$$

O jei

$$x(t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.19b)$$

signalas $x(t)$ vadinamas antipriežastiniu. Remiantis (2.17), (2.18) ir (2.19a) lygtimis, priežastinės tolydinės TSS išėjimo signalas $y(t)$ aprašomas taip:

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (2.20)$$

Stabilumas

Tuo, kad TSS yra stabilioji, nesunkiai galima įsitikinti pana-
grinęjus jos impulsinę charakteristiką. Tarkime, kad tolydinės TSS
įėjimo signalas $x(t)$ yra apribotas

$$|x(t)| \leq k_1 \quad \text{visiems } t.$$

Tuomet, pasinaudojus (2.10) lygtimi, galima užrašyti:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau) x(t - \tau)| d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |x(t - \tau)| d\tau \leq k_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Taigi, jei impulsinė charakteristika absoliučiai integruojama:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = K < \infty, \quad (2.21)$$

tai $|y(t)| \leq k_1 K = k_2$, kas įrodo sistemos stabilumą.

2.4. TSS tikrinės funkcijos

Kaip buvo aptarta pirmajame skyriuje, tikrinės TSS funkcijos
yra kompleksinės eksponentės e^{st} :

$$\mathbf{T} \{e^{st}\} = \lambda e^{st}, \quad (2.22)$$

čia λ – tikrinė $\mathbf{T}$ vertė, susijusi su e^{st} . Į (2.10) lygtį įrašius
 $x(t) = e^{st}$,

$$y(t) = \mathbf{T} \{e^{st}\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} \quad (2.23)$$

$$= H(s) e^{st} = \lambda e^{st},$$

čia

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (2.24)$$

Taigi TSS tikrinę vertę, susijusią su tikrine funkcija e^{st} , aprašo $H(s)$ – kompleksinė konstanta, kurios vertę lemia kompleksinio kintamojo s vertė. Iš (2.23) lygties taip pat išeina, kad $y(0) = H(s)$.

Gautieji rezultatai sudaro Laplaso ir Furjė transformacijų apibrėžimų, pateiktų trečiajame ir ketvirtajame šio uždavinyno skyriuose, pagrindą.

2.5. Sistemų aprašymas diferencialinėmis lygtimis

Tiesinės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais

Bendroji n -osios eilės tiesinė diferencialinė lygtis su pastoviais koeficientais yra tokia:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad (2.25)$$

čia koeficientai a_k ir b_k – realieji skaičiai. o -oji eilė nusako aukščiausią $y(t)$ išvestinę (2.25) lygtyje. Tokioms diferencialinėms lygtims tenka pagrindinis vaidmuo aprašant įvairiausių elektrinių, mechaninių, cheminių ir biologinių sistemų sąryšius tarp įėjimo ir išėjimo signalų. Pavyzdžiui, 1.3 uždavinyje nagrinėtoje RC grandinėje įėjimo signalas $x(t) = v_s(t)$ ir išėjimo signalas $y(t) = v_c(t)$

tarpusavyje susieti šia pirmosios eilės diferencialine lygtimi (1.46) su pastoviais koeficientais:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t).$$

Bendrasis (2.25) lygties sprendinys duotam įėjimo signalui $x(t)$ užrašomas taip:

$$y(t) = y_d(t) + y_b(t), \quad (2.26)$$

čia $y_d(t)$ – dalinis sprendinys, tenkinantis (2.25) lygtį, o $y_b(t)$ – bendrasis sprendinys, tenkinantis homogeninę diferencialinę lygtį:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0. \quad (2.27)$$

Tiksliai $y_b(t)$ išraišką lemia N pagalbinių sąlygų. Pažymėtina, kad (2.25) lygtis iki galo nenusako išėjimo signalo $y(t)$ priklausomybės nuo įėjimo signalo $x(t)$, jei nenurodytos pagalbinės sąlygos. Bendruoju atveju pagalbinių sąlygų sistema sudaro funkcijų

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

vertės nurodytu laiko momentu.

Tiesiškumas

(2.25) lygtimi aprašoma sistema bus tiesinė tik tuomet, kai visos pagalbinės sąlygos bus lygios nuliui (žr. 2.19 uždavinį). Jei pagalbinės sąlygos nelygios nuliui, sistemos reakciją $y(t)$ galima užrašyti taip:

$$y(t) = y_{ns}(t) + y_{np}(t), \quad (2.28)$$

čia $y_{ns}(t)$ – sistemos reakcija, esant nuliniam įėjimo signalui, o $y_{np}(t)$ – sistemos reakcija, esant nulinėms pagalbinėms sąlygoms. (2.28) lygtis grafiškai pavaizduota 2.2 pav.

Pažymėtina, kad $y_{ns}(t) \neq y_b(t)$, o $y_{np}(t) \neq y_d(t)$, kadangi bendruoju atveju į $y_{ns}(t)$ sudėtį įeina $y_b(t)$, o $y_{np}(t)$ susideda tiek iš $y_b(t)$, tiek ir iš $y_d(t)$ (žr. 2.5 uždavinį).

2.2 pav. Sistemos reakcija, esant nuliniam įėjimo signalui ir nulinėms pagalbinėms sąlygoms

Priežastingumas

Tam, kad (2.25) lygtimi aprašoma tiesinė sistema būtų priežastinė, privalu daryti prielaidą apie pradinę ramybės būseną, t. y. jei $x(t) = 0$, esant $t \leq t_0$, tai laikoma, kad $y(t) = 0$, esant $t \leq t_0$ (žr. 1.27 uždavinį). Taigi, kai $t > t_0$, sistemos reakciją galima apskaičiuoti iš (2.25) lygties, esant tokioms pradinėms sąlygoms:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0,$$

čia

$$\frac{d^k y(t_0)}{dt^k} = \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=t_0}.$$

Akivaizdu, kad esant pradinei ramybės būsenai $y_{ns}(t) = 0$.

Stacionarumas

Esant tiesinei priežastinei sistemai pradinė pusiausvyros būseną kartu reiškia ir stacionarumą (2.20 uždavinys).

Impulsinė charakteristika

Tolydinės TSS, aprašomos (2.25) lygtimi, impulsinė charakteristika $h(t)$ tenkina diferencialinę lygtį

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}, \quad (2.29)$$

esant pradinei ramybės būsenai. Pavyzdžiai, kaip randama impulsinė charakteristika, – 2.21–2.23 uždaviniai. Trečiajame ir ketvirtajame skyriuose impulsinės charakteristikos ieškosime, taikydami transformacijų metodus.

2.6. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

2.1. Tolydinės tiesinės stacionariosios sistemos įėjimo signalas $x(t)$ ir impulsinė charakteristika $h(t)$ aprašomi taip:

$$x(t) = u(t) \qquad h(t) = e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0.$$

- (a) Apskaičiuokite išėjimo signalą $y(t)$, naudodami (2.6) lygtį.
- (b) Apskaičiuokite išėjimo signalą $y(t)$, naudodami (2.10) lygtį.

Sprendimas

(a) Remiantis (2.6) lygtimi,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Funkcijos $x(\tau)$ ir $h(t - \tau)$ pavaizduotos 2.3 a pav., kai $t < 0$ ir $t > 0$. Kaip matyti iš šio paveikslėlio, kai $t < 0$, $x(\tau)$ ir $h(t - \tau)$ nepersidengia. O kai $t > 0$, funkcijos persidengia intervale nuo $\tau = 0$ iki $\tau = t$. Todėl, kai $t < 0$, $y(t) = 0$. Kai $t > 0$, sistemos atsakas lygus:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau \\ &= e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

Taigi išėjimo signalą $y(t)$ galima užrašyti taip:

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t). \quad (2.30)$$

(b) Remiantis (2.10) lygtimi,

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau.$$

2.3 pav.

Funkcijos $h(\tau)$ ir $x(t-\tau)$ pavaizduotos 2.3 b pav., kai $t < 0$ ir $t > 0$. Kaip matyti iš šio paveikslo, kai $t < 0$, $h(\tau)$ ir $x(t-\tau)$ nepersidengia. O kai $t > 0$, funkcijos persidengia intervale nuo $\tau = 0$ iki $\tau = t$. Todėl, kai $t < 0$, $y(t) = 0$. Kai $t > 0$, sistemos atsakas lygus:

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Taigi išėjimo signalą $y(t)$ galima užrašyti taip:

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t). \quad (2.31)$$

Kaip matome, ši lygtis identiška (2.30) lygčiai.

2.2. Duota tolydinė tiesinė stacionarioji sistema, kurios atsakas į vienetinį šuolį aprašomas taip:

$$s(t) = e^{-t} u(t).$$

Raskite šios sistemos atsaką į 2.4 pav. pavaizduotą įėjimo signalą $x(t)$.

Sprendimas

Kaip matyti iš 2.4 pav., įėjimo signalą $x(t)$ galima išreikšti taip:

$$x(t) = u(t-1) - u(t-3).$$

Kadangi sistema yra tiesinė ir stacionarioji, jos išėjimo signalą galima užrašyti taip:

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t-1) - s(t-3) \\ &= e^{-(t-1)} u(t-1) - e^{-(t-3)} u(t-3). \end{aligned}$$

2.4 pav.

2.3. Duota tolydinė tiesinė stacionarioji sistema, kurios įėjimo ir išėjimo signalai susiję taip:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau. \quad (2.32)$$

- (a) Raskite šios sistemos impulsinę charakteristiką $h(t)$.
- (b) Įrodykite, kad kompleksinė eksponentė e^{st} yra tikrinė sistemos funkcija.
- (c) Raskite sistemos tikrinę vertę, atitinkančią e^{st} , naudodami prieš tai rastą impulsinę charakteristiką $h(t)$.

Sprendimas

(a) Remiantis (2.32) lygtimi ir (2.1) apibrėžimu,

$$h(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau = e^{-(t-\tau)} \Big|_{\tau=0} = e^{-t} \quad t > 0.$$

Taigi

$$h(t) = e^{-t} u(t). \quad (2.33)$$

(b) Tarkime, kad $x(t) = e^{st}$. Tuomet

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} e^{s\tau} d\tau = e^{-t} \int_{-\infty}^t e^{(s+1)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{s+1} e^{st} = \lambda e^{st}, \quad \text{jei } \operatorname{Re} s > -1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Taigi, remiantis (2.22) apibrėžimu, e^{st} yra sistemos tikrinė funkcija, kurios tikrinė vertė

$$\lambda = \frac{1}{s+1}. \quad (2.35)$$

(c) Remiantis (2.24) ir (2.33) lygtimis, su e^{st} susijusi tikrinė vertė aprašoma taip:

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s+1)\tau} d\tau = \frac{1}{s+1}, \quad \text{jei } \operatorname{Re} s > -1.$$

Gautas rezultatas atitinka (2.35) lygtį.

2.4. Tolydinę sistemą, pavaizduotą 2.5 pav., sudaro integratorius ir skaliarinis daugintuvas. Užrašykite diferencialinę lygtį, susiejančią išėjimo signalą $y(t)$ su įėjimo signalu $x(t)$.

2.5 pav.

Sprendimas

Tarkime, kad $e(t)$ – 2.5 pav. pavaizduoto integratoriaus įėjimo signalas. Tuomet sąryšis tarp integratoriaus įėjimo ir išėjimo signalų užrašomas taip:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau. \quad (2.36)$$

Diferencijuojant abi (2.36) lygties puses t atžvilgiu, gaunama

$$\frac{dy(t)}{dt} = e(t). \quad (2.37)$$

Remiantis 2.5 pav., integratoriaus įėjimo signalą galima užrašyti taip:

$$e(t) = x(t) - ay(t). \quad (2.38)$$

Įstačius (2.38) lygtį į (2.37), gaunama:

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - ay(t).$$

Pastarąją lygybę galima perrašyti taip:

$$\frac{dy(t)}{dt} + x(t) = ay(t). \quad (2.39)$$

Gautoji išraiška ir yra pirmosios eilės tiesinė diferencialinė lygtis, kurią reikėjo išvesti.

2.5. Duota tolydinė sistema, kurios įėjimo signalas $x(t)$ ir išėjimo signalas $y(t)$ susiję taip:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t), \quad (2.40)$$

čia a – konstanta.

(a) Raskite $y(t)$, naudodami pagalbinę sąlygą $y(0) = y_0$ ir

$$x(t) = Ke^{-bt}u(t). \quad (2.41)$$

(b) Išreikškite $y(t)$ sistemos reakciją, esant nuliniam įėjimo signalui ir nulinėms pagalbinėms sąlygoms, suma.

Sprendimas

(a) Tarkime, kad

$$y(t) = y_d(t) + y_b(t),$$

čia $y_d(t)$ – dalinis sprendinys, tenkinantis (2.40) lygtį, o $y_b(t)$ – bendrasis sprendinys, tenkinantis:

$$\frac{dy_b(t)}{dt} + ay_b(t) = 0. \quad (2.42)$$

Darome prielaidą, kad:

$$y_d(t) = Ae^{-bt}, \quad t > 0. \quad (2.43)$$

Įstatę (2.43) lygtį į (2.40), gauname:

$$-bAe^{-bt} + aAe^{-bt} = Ke^{-bt},$$

Iš pastarosios išraiškos matyti, kad $A = K/(a-b)$, o

$$y_d(t) = \frac{K}{a-b} e^{-bt}, \quad t > 0. \quad (2.44)$$

Norėdami rasti $y_b(t)$, darome prielaidą, kad:

$$y_b(t) = Be^{st}.$$

Įstačius šią lygtį į (2.42), gaunama:

$$sBe^{st} + aBe^{st} = (s+a)Be^{st} = 0.$$

Iš šios lygybės išseina, kad $s = -a$, o

$$y_b(t) = Be^{-at}.$$

Sujungus į vieną $y_d(t)$ ir $y_b(t)$ išraiškas, gaunama:

$$y(t) = Be^{-at} + \frac{K}{a-b} e^{-bt}, \quad t > 0. \quad (2.45)$$

Remiantis (2.45) lygtimi ir pagalbine sąlyga $y(0) = y_0$, galima užrašyti:

$$B = y_0 - \frac{K}{a-b}.$$

Taigi (2.45) lygtį galima perrašyti taip:

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{K}{a-b} \right) e^{-at} + \frac{K}{a-b} e^{-bt}, \quad t > 0. \quad (2.46)$$

Kai $t < 0$, $x(t) = 0$, ir (2.40) lygtis virsta (2.42). Taigi

$$y(t) = B e^{-at}, \quad t < 0.$$

Pasinaudojus pagalbine sąlyga $y(0) = y_0$, galima užrašyti:

$$y(t) = y_0 e^{-at}, \quad t < 0. \quad (2.47)$$

(b) Sujungiant (2.46) ir (2.47) lygtis, $y(t)$ galima išreikšti y_{ns} (reakcija, esant nuliniam įėjimo signalui) ir y_{np} (reakcija, esant nulinėms pagalbinėms sąlygoms) suma:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-at} + \frac{K}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}) u(t) \\ &= y_{ns}(t) + y_{np}(t), \end{aligned} \quad (2.48)$$

čia

$$y_{ns}(t) = y_0 e^{-at}, \quad (2.49a)$$

$$y_{np}(t) = \frac{K}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}) u(t). \quad (2.49b)$$

2.7. Uždaviniai

2.6. Įrodykite, kad:

(a) $x(t) * h(t) = x(t)$;

(b) $\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$.

2.7. Įrodykite, kad:

(a) $x(t) * \delta(t) = h(t) * x(t)$;

(b) $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$;

(c) $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$;

(d) $x(t) * u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau$.

2.8. Tarkime, kad $y(t) = x(t) * h(t)$. Įrodykite, kad:

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2).$$

2.9. Apskaičiuokite tolydinės tiesinės stacionariosios sistemos išėjimo signalą $y(t)$, jei sistemos impulsinė charakteristika $h(t)$ ir įėjimo signalas $x(t)$ aprašomi taip:

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad x(t) = e^{\alpha t} u(-t) \quad \alpha > 0$$

$$\text{Ats. } y(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} \quad \alpha > 0.$$

2.10. Apskaičiuokite $y(t) = x(t) * h(t)$, naudodami 2.6 pav. pateiktus grafikus. Skaičiavimą atlikite: (a) analitiniu metodu, (b) grafiniu metodu.

2.6 pav.

Ats. $y(t) = t u(t) - (t-2) u(t-2) - (t-3) u(t-3) + (t-5) u(t-5)$.

2.11. Jei $x_1(t)$ ir $x_2(t)$ yra periodiniai signalai, turintys tą patį periodą T_0 , $x_1(t)$ ir $x_2(t)$ sąsūka nekonverguoja. Šiuo atveju apibrėžiama $x_1(t)$ ir $x_2(t)$ periodinė sąsūka:

$$f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau.$$

(a) Įrodykite, kad $f(t)$ – periodinė funkcija, kurios periodas lygus T_0 .

(b) Įrodykite, kad bet kokiam a galioja:

$$f(t) = \int_a^{a+T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau.$$

(c) Apskaičiuokite 2.7 pav. pavaizduoto signalo $x(t)$ periodinę sąsūką su savimi.

2.7 pav.

Ats. (c)
$$f(t) = \begin{cases} A^2 t & 0 < t \leq T_0/2 \\ -A^2(t - T_0) & T_0/2 < t \leq T_0 \end{cases}$$

ir $f(t + T_0) = f(t)$

2.12. Duota tolydinė tiesinė stacionarioji sistema, kurios įėjimo signalas $x(t)$ ir išėjimo signalas $y(t)$ pavaizduoti atitinkamai 2.8 a ir b pav. Nubraižykite šios sistemos išėjimo signalą, esant tokiems įėjimo signalams: (a) $x(t - 2)$, (b) $\frac{1}{2}x(t)$.

Ats. (a) Žr. 2.9 a pav.; (b) Žr. 2.9 b pav.

2.8 pav.

a)

b)

2.9 pav.

2.13. Duota tolydinė tiesinė stacionarioji sistema, aprašoma taip:

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) d\tau.$$

(a) Raskite sistemos impulsinę charakteristiką $h(t)$.

(b) Ar ši sistema – priežastinė?

Ats. (a) $h(t) = \begin{cases} 1/T & -T/2 < t \leq T/2, \\ 0 & t < -T/2 \text{ ir } t \geq T/2 \end{cases}$; (b) Ne.

2.14. Tarkime, kad $y(t)$ yra tolydinės tiesinės stacionariosios sistemos atsakas į įėjimo signalą $x(t)$. Raskite sistemos atsaką į įėjimo signalą $x'(t)$, kuris yra pirmoji $x(t)$ išvestinė.

Ats. $y'(t) = h(t) * x'(t)$.

2.15. Sistema, pavaizduota 2.10 a pav., yra pakopinis dviejų sistemų junginys. Šių sistemų impulsinės charakteristikos yra atitinkamai $h_1(t)$ ir $h_2(t)$:

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \text{ ir } h_2(t) = 2e^{-t}u(t).$$

(a) Raskite visos sistemos, pavaizduotos 2.10 b pav., impulsinę charakteristiką $h(t)$.

(b) Nustatykite, ar tokia sistema stabilioji.

Ats. (a) $h(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$; (b) Taip.

a)

b)

2.10 pav.

2.16. Duota tolydinė tiesinė stacionarioji sistema, aprašoma taip:

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) d\tau.$$

(a) Raskite sistemos tikrinę vertę, atitinkančią tikrinę funkciją e^{st} .

(b) Pakartokite skaičiavimą, naudodami sistemos impulsinę charakteristiką $h(t)$.

Ats. $\lambda = \frac{1}{T}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})$.

2.17. Duota stabilioji tolydinė tiesinė stacionarioji sistema, kurios impulsinė charakteristika $h(t)$ yra realioji ir lyginė. Įrodykite, kad $\cos \omega t$ ir $\sin \omega t$ yra šios sistemos tikrinės funkcijos, turinčios tą pačią realiąją tikrinę vertę.

2.18. Tolydinę sistemą, pavaizduotą 2.11 pav., sudaro du integritoriai ir du skaliariniai daugintuvai. Užrašykite diferencialinę lygtį, susiejančią išėjimo signalą $y(t)$ su įėjimo signalu $x(t)$.

Ats. $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t)$.

2.11 pav.

2.19. Žr. sistemą, aprašytą 2.5 uždavinyje.

(a) Įrodykite, kad sistema nėra tiesinė, jei $y(0) = y_0 \neq 0$.

(b) Įrodykite, kad sistema yra tiesinė, jei $y(0) = 0$.

2.20. Žr. sistemą, aprašytą 2.5 uždavinyje. Įrodykite, kad pradinė pusiausvyros būseną $y(0) = 0$ taip pat reiškia, jog sistema yra stacionarioji.

2.21 Žr. sistemą, aprašytą 2.5 uždavinyje. Raskite sistemos impulsinę charakteristiką $h(t)$.

$$\text{Ats. } h(t) = e^{-at} u(t).$$

2.22. Žr. sistemą, aprašytą 2.5 uždavinyje. Jei $y(0) = 0$,

(a) raskite sistemos šuolinį atsaką $s(t)$, nenaudodami impulsinės charakteristikos $h(t)$;

(b) raskite sistemos šuolinį atsaką $s(t)$, naudodami 2.21 uždavinyje rastą impulsinę charakteristiką $h(t)$;

(c) raskite impulsinę charakteristiką $h(t)$ iš $s(t)$.

$$\text{Ats. } s(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t); \quad h(t) = e^{-at} u(t).$$

2.23. Duota sistema, aprašoma taip:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t).$$

Raskite sistemos impulsinę charakteristiką $h(t)$.

$$\text{Ats. } h(t) = -e^{-2t} u(t) + \delta(t).$$

3. LAPLASO TRANSFORMACIJA IR TSS

3.1. Įvadas

Vienas iš svarbiausių dalykų, aptartų antrajame skyriuje, yra tai, kad TSS atsaką į įėjimo signalą galima rasti skaičiuojant šio signalo sąsūką su sistemos impulsine charakteristika. Šiame skyriuje pateikiamas alternatyvus būdas signalams ir TSS vaizduoti. Tolydiniais signalams vaizduoti kompleksinio kintamojo s plokštumoje bus pasitelkta Laplaso transformacija, o tolydiniais TSS – sistemos funkcija. Taikant Laplaso transformacijos metodą, galima daug ką sužinoti apie TSS savybes. Šios žinios labai praverčia sprendžiant uždavinius, susijusius su tokiomis sistemomis.

3.2. Laplaso transformacija

Kaip buvo aptarta 2.4 poskyryje, tolydinės TSS, apibūdinamos impulsine charakteristika $h(t)$, atsakas $y(t)$ į kompleksinės eksponentės pavidalo įėjimo signalą e^{st} yra toks:

$$y(t) = \mathbf{T}\{e^{st}\} = H(s) e^{st}, \quad (3.1)$$

čia

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt. \quad (3.2)$$

Apibrėžimas

3.2 lygtyje esanti funkcija $H(s)$ vadinama $h(t)$ (dvipuse) Laplaso transformacija. Bendroju atveju tolydinio signalo $x(t)$ Laplaso transformacija $X(s)$ apibrėžiama taip:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \quad (3.3)$$

Kintamasis s paprastai yra kompleksinis ir užrašomas taip:

$$s = \sigma + j\omega. \quad (3.4)$$

(3.3) lygtis gali būti laikoma operatoriumi, transformuojančiu signalą $x(t)$ į funkciją $X(s)$. Sakoma, kad ši funkcija ir signalas sudaro Laplaso transformacijos porą, žymimą tokiu simboliu:

$$x(t) \leftrightarrow X(s). \quad (3.5)$$

Konvergavimo sritis

Kompleksinio kintamojo s verčių diapazonas, kuriame konverguoja Laplaso transformacija, vadinamas konvergavimo sritimi (KS). Laplaso transformacijai ir su ja susijusiai konvergavimo sričiai iliustruoti panagrinėkime tokį pavyzdį.

3.1 pavyzdys

Tarkime, kad duotas signalas

$$x(t) = e^{-at} u(t), \quad a - \text{realusis sk.} \quad (3.6)$$

Remiantis (3.3) lygtimi, $x(t)$ Laplaso transformacija yra:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \quad \operatorname{Re}(s) > -a, \quad (3.7)$$

nes $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+a)t} = 0$ tik tuomet, kai $\operatorname{Re}(s+a) > 0$ arba $\operatorname{Re}(s) > -a$.

Kaip matyti iš (3.7) lygties, konvergavimo sritį nusako nelygybė $\operatorname{Re}(s) > -a$. Ji atitinka užbrūkšniuotą kompleksinės plokštumos plotą į dešinę nuo tiesės $\operatorname{Re}(s) = -a$ (žr. 3.1 pav.).

3.1 pav. Konvergavimo sritis

Uždaviniuose, kuriuose taikoma Laplaso transformacija, kompleksinė plokštuma paprastai vadinama s plokštuma.

$X(s)$ poliai ir nuliai

Paprastai $X(s)$ būna racionali s funkcija, t. y.

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}. \quad (3.8)$$

Koeficientai a_k ir b_k yra realiosios konstantos, m ir n – teigiami sveikieji skaičiai. $X(s)$ vadinama taisyklingąja racionaliąja funkcija, jei $n > m$, arba netaisyklingąja racionaliąja funkcija, jei $n \leq m$. Skaitiklio polinomo šaknys z_k vadinamos $X(s)$ nuliais, nes šioms s vėrtėms $X(s) = 0$. O vardiklio polinomo šaknys p_k vadinamos $X(s)$ poliais, nes šioms s vėrtėms $X(s)$ yra begalybė. Taigi $X(s)$ poliai yra už konvergavimo srities ribų, nes pagal apibrėžimą $X(s)$ poliuose nekonverguoja. Kita vertus, nuliai gali būti tiek konvergavimo srities ribose, tiek ir už jų. Jei nepaisysime daugiklio a_0/b_0 , $X(s)$ galima visiškai apibūdinti jos nuliais ir poliais.

Kiekvieno poliaus padėtį s plokštumoje priimta žymėti „ $\times$ “, o nulio – „ $\circ$ “. Tai iliustruoja 3.2 pav., kuriame pavaizduota tokia $X(s)$:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = 2 \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \quad \text{Re}(s) > -1.$$

Kaip matome, $X(s)$ turi vieną nulį taške $s = -2$ ir du polius taškuose $s = -1$ ir $s = -3$, esant daugikliui 2.

3.2 pav. $X(s) = (2s+4)/(s^2+4s+3)$ vaizdavimas s plokštumoje

Konvergavimo srities savybės

Kaip matyti iš 3.1 pavyzdžio, $X(s)$ konvergavimo sritis priklauso nuo $x(t)$ pobūdžio. Jei $X(s)$ yra racionalioji s funkcija, jai būdingos penkios toliau aprašytos savybės.

1. Konvergavimo srityje nebūna polių.

2. Jei $x(t)$ yra baigtinės trukmės signalas, t. y. $x(t) = 0$ visur, išskyrus baigtinį intervalą $t_1 \leq t \leq t_2$ ($-\infty < t_1, t_2 < \infty$), tai konvergavimo sritis apima visą s plokštumą, išskyrus galbūt $s = 0$ arba $s = \infty$.

3. Jei $x(t)$ yra dešiniapusis signalas, t. y. $x(t) = 0$, kai $t < t_1 < \infty$, tai konvergavimo sritis yra:

$$\operatorname{Re}(s) > \sigma_{\max},$$

čia $\sigma_{\max}$ lygus bet kurio iš $X(s)$ polių didžiausiai realiajai daliai. Taigi konvergavimo sritis apima pusplokštumą į dešinę nuo vertikalios tiesės $\operatorname{Re}(s) = \sigma_{\max}$ s plokštumoje (ir kartu į dešinę nuo visų $X(s)$ polių).

4. Jei $x(t)$ yra kairiapusis signalas, t. y. $x(t) = 0$, kai $t > t_2 > -\infty$, tai konvergavimo sritis yra:

$$\operatorname{Re}(s) < \sigma_{\min},$$

čia $\sigma_{\min}$ lygus bet kurio iš $X(s)$ polių mažiausiai realiajai daliai. Taigi konvergavimo sritis apima pusplokštumą į kairę nuo vertikalios tiesės $\operatorname{Re}(s) = \sigma_{\max}$ s plokštumoje (ir kartu į kairę nuo visų $X(s)$ polių).

5. Jei $x(t)$ yra dvipusis signalas, t. y. neribotos trukmės signalas, kuris nėra nei dešiniapusis, nei kairiapusis, tai konvergavimo sritis yra:

$$\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2,$$

čia σ_1 ir σ_2 – dviejų $X(s)$ polių realiosios dalys. Šiuo atveju konvergavimo sritis yra vertikali juosta s plokštumoje, esanti tarp vertikalios $\operatorname{Re}(s) = \sigma_1$ ir $\operatorname{Re}(s) = \sigma_2$.

3.3. Dažnai sutinkamų signalų Laplaso transformacijos

Vienetinio impulso funkcija $\delta(t)$

Pasinaudojus (3.3) lygtimi, galima užrašyti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \quad \text{visoms } s. \quad (3.9)$$

Vienetinio šuolio funkcija $u(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{Re}(s) > 0. \quad (3.10)$$

Kitų signalų Laplaso transformacijų poros

Kai kurių dažnai sutinkamų signalų Laplaso transformacijos pateiktos 3.1 lentelėje. Naudojant šią lentelę, nebūtina kiekvieną kartą skaičiuoti Laplaso transformacijos integralo.

3.1 lentelė. Laplaso transformacijos poros

$x(t)$	$X(s)$	Konvergavimo sritis
$\delta(t)$	1	visa s plokštuma
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}(s) < 0$
$t u(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$-e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}(s) < -\operatorname{Re}(a)$
$t e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$-t e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\operatorname{Re}(s) < -\operatorname{Re}(a)$
$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > 0$
$e^{-at} \cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$
$e^{-at} \sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(s) > -\operatorname{Re}(a)$

3.4. Laplaso transformacijos savybės

Tiesiškumas

Jei

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) \quad \text{KS} = R_1,$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) \quad \text{KS} = R_2,$$

tai

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s) \quad R' \supset R_1 \cap R_2. \quad (3.11)$$

Aibių teorijoje naudojamas žymėjimas $A \supset B$ reiškia, kad aibė A turi savyje aibę B . O $A \cap B$ žymi aibių A ir B sankirtą. Taigi (3.11) lygybė rodo, kad gautosios Laplaso transformacijos konvergavimo sritis yra bent jau to paties dydžio, kaip toji, kuri priklauso tiek R_1 , tiek R_2 .

Postūmis tam tikru laiku

Jei

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{KS} = R,$$

tai

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s) \quad R' = R. \quad (3.12)$$

(3.12) lygtis rodo, kad postūmio tam tikru laiku operacija konvergavimo srities nekeičia.

Kitos Laplaso transformacijos savybės

Kitos Laplaso transformacijos savybės aprašytos 3.2 lentelėje kartu su prieš tai aptartomis teisiškumo ir postūmio tam tikru laiku savybėmis.

3.2 lentelė. Laplaso transformacijos savybės

Savybė	Signalas	Transformacija	Konv. sritis
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Tiesiškumas	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Postūmis tam tikru laiku	$x(t-t_0)$	$e^{-s t_0} X(s)$	$R' = R$
Postūmis s plokštumoje	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s-s_0)$	$R' = R + \text{Re}(s_0)$
Laiko ašies mastelio keitimas	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X(s)$	$R' = aR$
Laiko ašies apvertimas	$x(-t)$	$X(-s)$	$R' = -R$
Diferencijavimas t atžvilgiu	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R' \supset R$
Diferencijavimas s atžvilgiu	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	$R' = R$
Integravimas	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$R' \supset R \cap \{\text{Re}(s) > 0\}$
Sąsūka	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

3.5. Atvirkštinė Laplaso transformacija

Norint rasti signalą $x(t)$ iš jo Laplaso transformacijos $X(s)$, praverčia atvirkštinė Laplaso transformacija.

Apvertimo formulė

Egzistuoja tam tikra procedūra, tinkanti visoms transformuotų funkcijų klasėms, pagal kurią skaičiuojamas toks linijinis integralas kompleksinėje s plokštumoje:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds. \quad (3.13)$$

Šioje formulėje realusis skaičius c turi būti parinktas toks, kad, esant $X(s)$ konvergavimo sričiai $\sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$, c pakliūtų į intervalą $\sigma_1 < c < \sigma_2$.

Lentelių su Laplaso transformacijų poromis naudojimas

Taikant kitą $X(s)$ apvertimo metodą, šį mėginama išreikšti tokia suma:

$$X(s) = X_1(s) + \cdots + X_n(s), \quad (3.14)$$

čia $X_1(s), \dots, X_n(s)$ – funkcijos, kurioms žinomos atvirkštinės transformacijos $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Remiantis tiesiškumo savybe (3.11),

$$x(t) = x_1(t) + \cdots + x_n(t). \quad (3.15)$$

Skaidos metodo taikymas

Jei $X(s)$ – racionalioji funkcija, t. y. tokia, kurios išraiška yra:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}, \quad (3.16)$$

tai jai apversti galima taikyti paprastą, skaidos teorema pagrįstą metodą.

(a) Kai $X(s)$ yra taisyklinga racionalioji funkcija ($m \geq n$), galima išskirti du atvejus.

1. Jei visi $X(s)$ poliai (kitais tarant, visi $D(s)$ nuliai) yra paprastieji (t. y. skirtingi), tai $X(s)$ galima užrašyti taip:

$$X(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}, \quad (3.17)$$

čia koeficientai c_k skaičiuojami pagal formulę:

$$c_k = (s - p_k) X(s) \Big|_{s=p_k}. \quad (3.18)$$

2. Jei $D(s)$ turi kartotinių šaknų, t. y. jei jo sudėtyje yra $(s - p_i)^r$ išraiškos daugiklių, sakoma, kad p_i yra kartotinis $X(s)$ polius, turintis kartotinumą r . Tuomet $X(s)$ skaidinys bus sudarytas iš tokių narių:

$$\frac{\lambda_1}{s - p_i} + \frac{\lambda_2}{(s - p_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_r}{(s - p_i)^r}, \quad (3.19)$$

čia

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left[(s - p_i)^r X(s) \right] \Big|_{s=p_i}. \quad (3.20)$$

(b) Kai $X(s)$ yra netaisyklinga racionalioji funkcija ($m \geq n$), taikant dalybos su liekana metodą, $X(s)$ galima užrašyti taip:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}, \quad (3.21)$$

čia $N(s)$ ir $D(s)$ yra atitinkamai $X(s)$ skaitiklio ir vardiklio polinamai, dalmuo $Q(s)$ yra $m - n$ laipsnio polinomas, o liekana $R(s)$ yra polinomas, kurio laipsnis griežtai mažesnis už n . Tuomet $X(s)$ atvirkštinę Laplaso transformaciją galima apskaičiuoti, radus $Q(s)$ ir $R(s)/D(s)$ atvirkštines Laplaso transformacijas. Kadangi $R(s)/D(s)$ yra taisyklingas, šio santykio atvirkštinę Laplaso transformaciją galima apskaičiuoti prieš tai jį išskaidžius pagal jau aptartą metodą. O $Q(s)$ atvirkštinę Laplaso transformaciją galima rasti naudojant transformacijų porą

$$\frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22)$$

3.6. Sistemos funkcija

Apibrėžimas

2.2 poskyryje buvo parodyta, kad tolydinės TSS išėjimo signalas $y(t)$ lygus įėjimo signalo $x(t)$ ir impulsinės charakteristikos sąsūkai, t. y.

$$y(t) = x(t) * h(t). \quad (3.23)$$

Pritaikius sąsūkos savybę (žr. 3.2 lentelę), gaunama:

$$Y(s) = X(s)H(s), \quad (3.24)$$

čia $Y(s)$, $X(s)$ ir $H(s)$ yra atitinkamai $y(t)$, $x(t)$ ir $h(t)$ Laplaso transformacijos. (3.24) lygtį galima perrašyti taip:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (3.25)$$

$h(t)$ Laplaso transformacija $H(s)$ vadinama sistemos (arba perdavimo) funkcija. Ši funkcija, kaip ir impulsinė charakteristika $h(t)$, visiškai apibūdina sistemą.

TSS apibūdinimas

Dauguma tolydinių TSS savybių glaudžiai susijusios su $H(s)$ charakteristikomis s plokštumoje, ypač su polių išsidėstymu ir konvergavimo sritimi.

Esant priežastinei tolydinei TSS

$$h(t) = 0, \quad t < 0.$$

Kadangi $h(t)$ yra dešiniapusis signalas, $H(s)$ konvergavimo sritis turi tenkinti sąlygą

$$\operatorname{Re}(s) > \sigma_{\max},$$

t. y. konvergavimo sritis apima s plokštumos dalį, esančią dešiniau visų sistemos polių.

Kaip aptarta 2.3 poskyryje, tolydinė TSS būna stabilioji tada ir tik tada, kai

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

Norint tenkinti šį reikalavimą, $H(s)$ konvergavimo sritis turi apimti $j\omega$ ašį (t. y. $s = j\omega$).

Taigi norint, kad sistema būtų priežastinė ir stabilioji, visi $H(s)$ poliai turi būti išsidėstę kairiojoje s pusplokštumėje, t. y. visų polių realiosios dalys turi būti neigiamos.

Tiesinėmis diferencialinėmis lygtimis aprašomų TSS sistemos funkcija

2.5 poskyryje nagrinėjome TSS, kurių įėjimo signalas $x(t)$ ir išėjimo signalas $y(t)$ tenkina bendrąją tiesinę diferencialinę lygtį su pastoviais koeficientais:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \quad (3.26)$$

Pritaikius Laplaso transformaciją ir pasinaudojus jos diferencijavimo savybe, gaunama:

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s).$$

Tai galima perrašyti taip:

$$Y(s) \sum_{k=0}^N a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^M b_k s^k. \quad (3.27)$$

Taigi

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}. \quad (3.28)$$

Kaip matome, $H(s)$ visuomet būna racionalioji. Pažymėtina, kad (3.28) lygtis nenurodo $H(s)$ konvergavimo srities. Ši randama atsižvelgiant į papildomus reikalavimus sistemai, pvz., priežastingumą ar stabilumą.

Sistemų sujungimas

Kai dvi TSS sujungiamos į pakopą (3.3 a pav.), bendroji impulsinė charakteristika $h(t)$ ieškoma taip:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t).$$

O pakopos bendrajai sistemos funkcijai rasti pakanka paprastos daugybos operacijos:

$$H(s) = H_1(s)H_2(s). \quad (3.29)$$

Ši sąryšį iliustruoja 3.3 b pav.

a)

b)

3.3 pav. Pakopinis dviejų sistemų sujungimas: (a) vaizdavimas laiko atžvilgiu; (b) vaizdavimas s srityje

Kai dvi TSS sujungiamos lygiagrečiai (3.4 a pav.), bendroji impulsinė charakteristika $h(t)$ ieškoma taip:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t).$$

Taigi

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s). \quad (3.30)$$

Ši sąryšį iliustruoja 3.4 b pav.

a)

b)

3.4 pav. Lygiagretusis dviejų sistemų sujungimas: (a) vaizdavimas laiko atžvilgiu; (b) vaizdavimas s srityje

3.7. Vienpusė Laplaso transformacija

Apibrėžimas

Vienpusė signalo $x(t)$ Laplaso transformacija $X_I(s)$ apibrėžiama taip:

$$X_I(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \quad (3.31)$$

Taigi vienusė Laplaso transformacija nepaiso $x(t)$, kai $t < 0$. Kadangi pagal (3.31) lygtį $x(t)$ yra dešiniapusis signalas, $X_I(s)$ konvergavimo sritis visuomet tenkina sąlygą $\text{Re}(s) > \sigma_{\max}$.

Savybės

Dauguma vienusės Laplaso transformacijos savybių yra tokios pačios, kaip ankstesniuose poskyriuose aptartos dvipusės Laplaso transformacijos. Vienusė Laplaso transformacija praverčia skaičiuojant priežastinės sistemos atsaką į signalą, kuomet sistema aprašoma tiesine diferencialine lygtimi su pastoviaisiais koeficientais, esant nenulinėms pradinėms sąlygoms. Šiuo atveju galima pasinaudoti tomis savybėmis, kuriomis vienusė Laplaso transformacija skiriasi nuo dvipusės, t. y. diferencijavimu ir integravimu laiko atžvilgiu. Trumpai aptarsime šias savybes.

Diferencijavimą laiko atžvilgiu aprašo tokia išraiška:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I(s) - x(0^-), \quad (3.32)$$

jei tik galioja $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-st} = 0$. Kartoiant šią savybę, gaunama:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-), \quad (3.33)$$

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nX_I(s) - s^{n-1}x(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-), \quad (3.34)$$

čia

$$x^{(r)}(0^-) = \left. \frac{d^rx(t)}{dt^r} \right|_{t=0^-}.$$

Integravimą laiko atžvilgiu aprašo tokios išraiškos:

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s), \quad (3.35)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau. \quad (3.36)$$

Sistemos funkcija

Esant vienpusei Laplaso transformacijai sistemos funkcija $H(s)$ apibrėžta tik tuomet, kai visos pradinės sąlygos yra nulinės.

Transformuotosios grandinės

Elektros grandine apdorojamų signalų sprendinius galima rasti ir nesudarinėjant integralinių-diferencialinių lygčių, o grandinės atliekamas operacijas ir signalus pavaizdavus jų Laplaso transformacijų atitikmenimis. Iš tokių atitikmenų sudaryta grandinė vadinama transformuotąja grandine. Norint analizuoti tokią grandinę, reikia turėti Laplaso transformacijos modelius atskiriems grandinės elementams. Šie modeliai aprašyti toliau ir pavaizduoti 3.5 pav. Jie pravers analizuojant grandines 3.6 ir 3.30–3.32 uždaviniuose.

Signalų šaltiniai modeliuojami taip:

$$v(t) \leftrightarrow V(s) \quad i(t) \leftrightarrow I(s),$$

čia $v(t)$ ir $i(t)$ yra atitinkamai įtampos ir srovės šaltinių signalai.

Varžinis elementas R modeliuojamas taip:

$$v(t) = Ri(t) \leftrightarrow V(s) = RI(s). \quad (3.37)$$

Induktyvusis elementas L modeliuojamas taip:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \leftrightarrow V(s) = sLI(s) - Li(0^-). \quad (3.38)$$

Kitas 3.5 pav. pavaizduoto induktyviojo elemento L modelis gaunamas perrašius (3.38) lygtį šitaip:

$$i(t) \leftrightarrow I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{1}{s} i(0^-). \quad (3.39)$$

Talpinis elementas C modeliuojamas taip:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \leftrightarrow I(s) = sCV(s) - Cv(0^-). \quad (3.40)$$

Kitas 3.5 pav. pavaizduoto talpinio elemento C modelis gaunamas perrašius (3.40) lygtį šitaip:

$$v(t) \leftrightarrow V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{1}{s} v(0^-). \quad (3.41)$$

3.8. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

3.1. Raskite šių signalų Laplaso transformacijas:

(a) $x(t) = -e^{-at}u(-t)$;

(b) $x(t) = e^{at}u(-t)$.

Sprendimas

(a) Remiantis (3.3) lygtimi,

$$\begin{aligned} X(s) &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t) e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^{0^-} e^{-(s+a)t} dt \\ &= \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Bigg|_{-\infty}^{0^-} = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) < -a. \end{aligned}$$

Taigi

$$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) < -a. \quad (3.42)$$

Grandinės elementas	Laiko srityje	s srityje
Įtampos šaltinis
Srovės šaltinis
Varžinis elementas
Induktyvusis elementas

3.5 pav. Transformuotosios grandinės elementų vaizdavimas

Grandinės
elementas

Modelis

Laiko
srityje

s
srityje

Talpinis
elementas

3.5 pav. (tęš.) Transformuotosios grandinės elementų vaizdavimas

(b) Remiantis (3.3) lygtimi,

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} u(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0^-} e^{-(s-a)t} dt \\
 &= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_{-\infty}^{0^-} = -\frac{1}{s-a} \quad \text{Re}(s) < a.
 \end{aligned}$$

Taigi

$$e^{-at} u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-a} \quad \text{Re}(s) < a. \quad (3.43)$$

3.2. Pasinaudodami Laplaso transformacijos savybėmis, iš $u(t)$ Laplaso transformacijos išveskite šių signalų Laplaso transformacijas:

- (a) $\delta(t)$;
- (b) $\delta'(t)$;
- (c) $\cos \omega_0 t u(t)$.

Sprendimas

(a) Remiantis (3.10) lygtimi,

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Kaip buvo aptarta 1.3 poskyryje,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}.$$

Pasinaudojus diferencijavimo laiko atžvilgiu savybe,

$$\delta(t) \leftrightarrow s \frac{1}{s} = 1 \quad \text{visoms } s.$$

(b) Dar kartą pritaikius diferencijavimo laiko atžvilgiu savybę prieš tai gautam rezultatui,

$$\delta'(t) \leftrightarrow s \quad \text{visoms } s. \quad (3.44)$$

(c) Pasinaudojus Eulerio formule, galima užrašyti:

$$\cos \omega_0 t u(t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) u(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} u(t).$$

Pritaikius tiesiškumo ir postūmio s plokštumoje savybes,

$$\cos \omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + j\omega_0} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

3.3. Raskite tokios $X(s)$ atvirkštinę Laplaso transformaciją:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \operatorname{Re}(s) > -1.$$

Sprendimas

Pasinaudojus 3.1 lentele,

$$x(t) = e^{-t}u(t).$$

3.4. Raskite tokios $X(s)$ atvirkštinę Laplaso transformaciją:

$$(a) \quad X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}, \quad \operatorname{Re}(s) > -1.$$

Sprendimas

Pritaikius skaidos teoremą, galima užrašyti:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = 2 \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+3}.$$

Pasinaudojus (3.18) lygtimi,

$$c_1 = (s+1) X(s) \Big|_{s=-1} = 2 \frac{s+2}{s+3} \Big|_{s=-1} = 1,$$

$$c_2 = (s+3) X(s) \Big|_{s=-3} = 2 \frac{s+2}{s+1} \Big|_{s=-3} = 1.$$

Taigi

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}.$$

$X(s)$ konvergavimo sritis yra $\text{Re}(s) > -1$. Todėl $x(t)$ yra dešiniapusis signalas, ir pasinaudojus 3.1 lentele,

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t).$$

Sprendimui patikrinti galima pasinaudoti MATLAB funkcija **ilaplace(x)**, leidžiančia rasti laiko funkciją tiesiogiai iš $X(s)$. Tam galima naudoti tokią komandą:

```
syms s t; Xs=(3*s+2)/(s^2+3*s+2); xt=ilaplace(Xs); pretty(xt)
```

Ivykdžius šią komandą, MATLAB komandiniame lange pasirodo toks reiškiny:

$$\exp(-3 \ t) \ + \ \exp(-t).$$

3.5. Raskite 1.13 pav. (1.3 uždavinys) pavaizduotos RC grandinės sistemos funkciją $H(s)$ ir impulsinę charakteristiką $h(t)$.

Sprendimas

(a) Tarkime, kad

$$x(t) = v_s(t), \quad y(t) = v_c(t).$$

Šiuo atveju RC grandinė aprašoma (1.46) lygtimi:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t).$$

Šiai lygčiai pritaikius Laplaso transformaciją,

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)Y(s) = \frac{1}{RC}X(s).$$

Remiantis (3.25) lygtimi, sistemos funkcija $H(s)$ yra:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + 1/RC}.$$

Kadangi sistema yra priežastinė, $H(s)$ pritaikius atvirkštinę Laplaso transformaciją, gaunama tokia impulsinė charakteristika:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t).$$

(b) Tarkime, kad

$$x(t) = v_s(t), \quad y(t) = i(t).$$

Šiuo atveju RC grandinė aprašoma (1.48) lygtimi:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{R} \frac{dx(t)}{dt}.$$

Šiai lygčiai pritaikius Laplaso transformaciją,

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right) Y(s) = \frac{1}{R} s X(s).$$

Taigi sistemos funkcija $H(s)$ yra:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s/R}{s + 1/RC} = \frac{1}{R} \frac{s}{s + 1/RC}.$$

Šiuo atveju sistemos funkcija yra netaisyklingoji trupmena. Todėl ją galima perrašyti taip:

$$H(s) = \frac{1}{R} \frac{s + 1/RC - 1/RC}{s + 1/RC} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2 C} \frac{1}{s + 1/RC}.$$

Kadangi sistema yra priežastinė, $H(s)$ pritaikius atvirkštinę Laplaso transformaciją, gaunama tokia impulsinė charakteristika:

$$h(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} u(t).$$

Kaip matome, skirtingos įėjimo ir išėjimo signalų poros lemia kitokią sistemos funkcijos išraišką.

3.6. Duota RC grandinė, pavaizduota 3.6 pav. Jungiklis įjungiamas momentu $t = 0$. Jei pradinė kondensatoriaus įtampa $v_c(0^-) = v_0$, raskite srovę $i(t)$.

3.6 pav.

Sprendimas

Įjungus jungiklį, 3.6 pav. pavaizduotą grandinę galima pakeisti 3.7 pav. pavaizduota grandine, kurioje $v_s(t) = Vu(t)$.

Kai išėjimo signalas yra $i(t)$, o įėjimo – $v_s(t)$, grandinę aprašo ši diferencialinė lygtis:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = v_s(t). \quad (3.45)$$

3.7 pav.

(3.45) lygčiai pritaikius vienpusę Laplaso transformaciją ir pasinaudojus (3.36) lygtimi, gaunama:

$$RI(s) + \frac{1}{C} \left[\frac{1}{s} I(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} i(\tau) d\tau \right] = \frac{V}{s}. \quad (3.46)$$

Kadangi

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau,$$

tai

$$v_c(0^-) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^-} i(\tau) d\tau = v_0.$$

Tuo būdu (3.46) lygtis pavirsta tokia:

$$\left(R + \frac{1}{Cs} \right) I(s) + \frac{v_0}{s} = \frac{V}{s}.$$

Išsprendus šią lygtį $I(s)$ atžvilgiu, gaunama:

$$I(s) = \frac{V - v_0}{s} \frac{1}{R + 1/Cs} = \frac{V - v_0}{R} \frac{1}{s + 1/RC}.$$

$I(s)$ pritaikius atvirkštinę Laplaso transformaciją,

$$i(t) = \frac{V - v_0}{R} e^{-t/RC} u(t).$$

3.7. Apskaičiuokite 3.8 a pav. pavaizduotos grandinės kompleksinę įėjimo varžą $Z(s)$. Visų grandinės elementų vertės nurodytos omais. Atsakymą patikrinkite MATLAB paketu.

Sprendimas

Norėdami palengvinti analizės uždavinį pradinę grandinę pakeičiame ekvivalentine grandine, pavaizduota 3.8 b pav.

a)

b)

3.8 pav.

Ekvivalentinę grandinę sudaro tokios varžos:

$$Z_1 = 13s + \frac{8}{s} = \frac{13s^2 + 8}{s}, \quad Z_2 = 10 + 5s,$$

$$Z_3 = 20 + \frac{16}{s} = \frac{4(5s + 4)}{s}.$$

Tuomet

$$\begin{aligned} Z(s) &= Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{13s^2 + 8}{s} + \frac{20(5s^2 + 14s + 8)}{5s^2 + 30s + 16} \\ &= \frac{65s^4 + 490s^3 + 528s^2 + 400s + 128}{s(5s^2 + 30s + 16)}. \end{aligned}$$

Tikriname atsakymą MATLAB paketu:

```
syms s; % Apibrėžiame simbolinį kintamąjį s
z1 = 13*s + 8/s; z2 = 5*s + 10; z3 = 20 + 16/s;
z = z1 + z2 * z3 / (z2+z3)
z =
```

$$13*s+8/s+(5*s+10)*(20+16/s)/(5*s+30+16/s)$$

z10 = simplify(z)

z10 =

$$(65*s^4+490*s^3+528*s^2+400*s+128)/s/(5*s^2+30*s+16)$$

Taigi skaičiavimai atlikti teisingai.

3.9. Uždaviniai

3.8. Duotas baigtinės trukmės signalas $x(t)$, kuris apibrėžiamas taip:

$$x(t) \begin{cases} \neq 0 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ = 0 & t < t_1, \quad t > t_2, \end{cases}$$

čia t_1 ir t_2 – baigtinės vertės. Jei esant bent vienai s vertei $X(s)$ konverguoja, tai $X(s)$ konvergavimo sritis – visa s plokštuma. Įrodykite šį teiginį.

3.9. Tarkime, kad

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t < 0, \quad t > T \end{cases}.$$

Raskite $x(t)$ Laplaso transformaciją.

$$\text{Ats. } \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}] \quad \text{visoms } s.$$

3.10. Raskite tokių signalų Laplaso transformacijas $X(s)$ ir nubraižykite polių bei nulių diagramas kartu su konvergavimo sritimis:

$$(a) \quad x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t);$$

$$(b) \quad x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{2t}u(-t);$$

$$(c) \quad x(t) = e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t).$$

$$\text{Ats. (a)} \quad \frac{2(s + \frac{5}{2})}{(s + 2)(s + 3)} \quad \operatorname{Re}(s) > -2;$$

$$(b) \quad \frac{-5}{(s - 2)(s + 3)} \quad -3 < \operatorname{Re}(s) < 2;$$

$$(c) \quad X(s) \text{ neegzistuoja.}$$

3.11. Tarkime, kad

$$x(t) = e^{-a|t|}.$$

Raskite $X(s)$ ir nubraižykite polių bei nulių diagramą kartu su konvergavimo sritimi, kai $a > 0$ ir $a < 0$.

$$\text{Ats.} \quad \frac{-2a}{s^2 - a^2} \quad a > 0, \quad -a < \operatorname{Re}(s) < a;$$

$$X(s) \text{ neegzistuoja, kai } a < 0.$$

3.12. Raskite tokių signalų Laplaso transformacijas ir konvergavimo sritis:

$$(a) \quad x(t) = \delta(t - t_0);$$

$$(b) \quad x(t) = u(t - t_0);$$

$$(c) \quad x(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t - 5)];$$

$$(d) x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT);$$

$$(e) x(t) = \delta(at + b), \quad a, b - \text{realiosios konstantos.}$$

$$\text{Ats. (a) } e^{-st_0} \quad \text{visoms } s; \quad (b) \frac{e^{-st_0}}{s} \quad \text{Re}(s) > 0;$$

$$(c) \frac{1}{s+2} [1 - e^{-5(s+2)}] \quad \text{Re}(s) > -2;$$

$$(d) \frac{1}{1 - e^{-sT}} \quad \text{Re}(s) > 0; \quad (e) \frac{1}{|a|} e^{sb/a} \quad \text{visoms } s.$$

3.13. Pasinaudodami Laplaso transformacijos savybėmis, iš $u(t)$ Laplaso transformacijos išveskite šių signalų Laplaso transformacijas:

$$(a) tu(t);$$

$$(b) e^{-at} u(t);$$

$$(c) te^{-at} u(t);$$

$$(d) e^{-at} \cos \omega_0 t u(t).$$

$$\text{Ats. (a) } \frac{1}{s^2} \quad \text{Re}(s) > 0; \quad (b) \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}(s) > -a;$$

$$(c) \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{Re}(s) > -a; \quad (d) \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}(s) > -a.$$

3.14. Raskite šių $X(s)$ atvirkštinės Laplaso transformacijas:

$$(a) X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}(s) < -1;$$

$$(b) X(s) = \frac{s}{s^2 + 4}, \quad \text{Re}(s) > 0;$$

$$(c) X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}, \quad \text{Re}(s) > -1.$$

Ats. (a) $-e^{-t}u(-t)$; (b) $\cos 2tu(t)$; (c) $e^{-t} \cos 2tu(t)$.

3.15. Raskite šių $X(s)$ atvirkštinės Laplaso transformacijas:

(a) $X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}, \quad \operatorname{Re}(s) < -3;$

(b) $X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}, \quad -3 < \operatorname{Re}(s) < -1;$

Ats. (a) $-(e^{-t} + e^{-3t})u(-t)$; (b) $-e^{-t}u(-t) + e^{-3t}u(t)$.

3.16. Raskite $X(s)$ atvirkštinę Laplaso transformaciją:

$$X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Ats. $[1 - e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t)]u(t)$.

3.17. Raskite $X(s)$ atvirkštinę Laplaso transformaciją:

$$X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -3.$$

Ats. $[2e^{-3t} - e^{-5t} - 10te^{-5t}]u(t)$.

3.18. Raskite šių $X(s)$ atvirkštinės Laplaso transformacijas:

(a) $X(s) = \frac{2s+1}{s+2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -2;$

(b) $X(s) = \frac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -1;$

(c) $X(s) = \frac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2}, \quad \operatorname{Re}(s) > -1.$

- Ats. (a) $2\delta(t) - 3e^{-2t}u(t)$; (b) $\delta(t) + (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$;
 (c) $\delta'(t) - \delta(t) + (2 + e^{-3t})u(t)$.

3.19. Raskite $X(s)$ atvirkštinę Laplaso transformaciją:

$$X(s) = \frac{2 + 2se^{-2s} + 4e^{-4s}}{s^2 + 4s + 3}, \quad \operatorname{Re}(s) > -1.$$

Ats. $(e^{-t} - e^{-3t})u(t) + [-e^{-(t-2)} + 3e^{-3(t-2)}]u(t-2)$
 $+ 2[e^{-(t-4)} - e^{-3(t-4)}]u(t-4).$

3.20. Pakartokite 2.5 uždavinį, pasinaudodami Laplaso transformacija.

3.21. Tolydinės tiesinės stacionariosios sistemos išėjimo signalas $y(t)$ lygus $2e^{-3t}u(t)$, esant įėjimo signalui $x(t) = u(t)$.

(a) Raskite sistemos impulsinę charakteristiką $h(t)$.

(b) Raskite išėjimo signalą, esant įėjimo signalui $x(t) = e^{-t}u(t)$

Ats. (a) $2\delta(t) - 6e^{-3t}u(t)$; (b) $(-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$.

3.22. Pakartokite 2.12 uždavinį, pasinaudodami Laplaso transformacija.

3.23. Pakartokite 2.21 uždavinį, pasinaudodami Laplaso transformacija.

3.24. Pakartokite 2.23 uždavinį, pasinaudodami Laplaso transformacija.

3.25. Duota tolydinė tiesinė stacionarioji sistema, kurios įėjimo signalas $x(t)$ ir išėjimo signalas $y(t)$ susiję taip:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t).$$

(a) Raskite sistemos funkciją $H(s)$.

(b) Raskite impulsinę charakteristiką $h(t)$, kai sistema: (i) yra priežastinė, (ii) yra stabilioji, (iii) nėra nei priežastinė, nei stabilioji.

Ats. (a) $\frac{1}{(s+2)(s-1)}$; (b) $-\frac{1}{3}(e^{-2t} - e^t)u(t)$;
 $-\frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^t u(-t)$; $\frac{1}{3}e^{-2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^t u(-t)$.

3.26. Dvi priežastinės posistemės, kurių sistemos funkcijos – $F(s)$ ir $G(s)$, sujungtos grįžtamojo ryšiu į sistemą, pavaizduotą 3.9 pav. Raskite tokio junginio sistemos funkciją $H(s)$.

Ats. $\frac{F(s)}{1 - F(s)G(s)}$.

3.9 pav.

3.27. (a) Įrodykite, kad abipusę $x(t)$ Laplaso transformaciją galima apskaičiuoti iš dviejų viopusių Laplaso transformacijų.

(b) Pasinaudodami (a) dalyje gautu rezultatu, raskite $e^{-2|t|}$ Laplaso transformaciją.

Ats. (b) $-\frac{4}{s^2 - 4} \quad -2 < \text{Re}(s) < 2$.

3.28. Įrodykite, kad:

(a) $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX_I(s)$;

(b) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_I(s)$.

3.29. Pakartokite 2.18 uždavinį, pasinaudodami vienvuse Laplaso transformacija.

3.30. Išspręskite antrosios eilės tiesinę diferencialinę lygtį

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t),$$

esant pradinėms sąlygoms $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. Įėjimo signalas $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Ats. $\frac{1}{2}e^{-t} + 6e^{-2t} - \frac{9}{2}e^{-3t} \quad t \geq 0$.

3.31. Pakartokite 3.6 uždavinį, vietoj $i(t)$ ieškodami $v_c(t)$.

Ats. $V(1 - e^{-t/RC}) + v_0 e^{-t/RC} \quad t \geq 0$.

3.32. Pakartokite 3.6 uždavinį, taikydami transformuotųjų grandinių metodą.

3.33. Grandinėje, pavaizduotoje 3.10 pav., jungiklis ilgą laiką buvo įjungtas, prieš jį išjungiant momentu $t = 0$. Raskite rite tekančią srovę $i(t)$, kai $t \geq 0$.

Ats. $e^{-2t}(2 \cos 6t - \frac{2}{3} \sin 6t)$.

3.10 pav.

3.34. Grandinėje, pavaizduotoje 3.11 pav., abu jungikliai įjungiami tuo pačiu momentu $t = 0$. Kondensatorių C_1 ir C_2 įtampos, prieš įjungiant jungiklius, lygios atitinkamai 1 V ir 2 V.

(a) Raskite sroves $i_1(t)$ ir $i_2(t)$.

(b) Raskite kondensatorių įtampas momentu $t = 0^+$.

Ats. (a) $i_1(t) = \delta(t) + \frac{3}{4}e^{-t/4}u(t)$; $i_2(t) = \delta(t) - \frac{3}{4}e^{-t/4}u(t)$;

(b) $v_{C_1}(0^+) = 2\text{ V}$; $v_{C_2}(0^+) = 3\text{ V}$.

3.11 pav.

4. SPEKTRINĖ TOLYDINIŲ SIGNALŲ IR SISTEMŲ ANALIZĖ

4.1. Įvadas

Trečiajame skyriuje buvo pristatyta Laplaso transformacija, dėl kurios signalai iš laiko srities perkeliama į kompleksinio dažnio sritį. Kaip jau išsiaiškinome, naudojant Laplaso transformacijas daugeliu atvejų ne tik lengviau yra nagrinėti, bet ir atskleidžiama daugiau detalių apie signalų ir sistemų pobūdį bei savybes. Šiame skyriuje susipažinsime su Furjė transformacija, leidžiančia signalus vaizduoti jų spektrais. Be to, spektrinė (arba Furjė) analizė svarbi apibūdinant tam tikrų tipų sistemas ir jų savybes dažnio srityje.

4.2. Periodinių signalų vaizdavimas Furjė eilute

Kompleksinės eksponentės išraiška

Periodinio signalo $x(t)$, kurio periodas – T_0 , skleidinys kompleksinės eksponentės Furjė eilute užrašomas taip:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (4.1)$$

čia c_k – kompleksiniai Furjė koeficientai, randami pagal:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (4.2)$$

(4.2) lygtyje k prilyginus 0,

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt. \quad (4.3)$$

Taigi c_0 lygus vidutinei $x(t)$ vertei per periodą.

Trigonometrinė išraiška

Trigonometrinė Furjė eilutės išraiška yra tokia:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t), \quad (4.4)$$

čia a_k ir b_k – Furjė koeficientai, randami pagal:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad (4.5a)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin k\omega_0 t dt. \quad (4.5b)$$

Jei periodinis signalas $x(t)$ yra lyginis, $b_k = 0$ ir tokio signalo Furjė eilutėje (4.4) yra tik nariai su kosinuso funkcija:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t. \quad (4.6)$$

Esant nelyginiam signalui $x(t)$, $a_k = 0$, todėl tokio signalo Furjė eilutėje yra tik nariai su sinuso funkcija:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t. \quad (4.7)$$

4.3. Furjė transformacija

Apibrėžimas

Signalų ir sistemų teorijos vadovėliuose įrodoma, kad baigtinės trukmės aperiodinio signalo $x(t)$ (t. y. tokio, kurio periodas $T_0 \rightarrow \infty$) skleidinys Furjė eilute virsta integralu, vadinamu Furjė transformacija:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.8)$$

O atvirkštinė Furjė transformacija apibrėžiama taip:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.9)$$

Sakoma, kad $x(t)$ ir $X(\omega)$ sudaro Furjė transformacijos porą:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega). \quad (4.10)$$

Furjė spektrai

Aperiodinio signalo $x(t)$ Furjė transformacija $X(\omega)$ bendruoju atveju yra kompleksinis dydis, kurią galima užrašyti taip:

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)}. \quad (4.11)$$

Dydis $|X(\omega)|$ vadinamas $x(t)$ amplitudžių spektru, o dydis $\phi(\omega) - x(t)$ fazių spektru.

Jei $x(t)$ yra realusis signalas, tai remiantis (4.8) lygtimi,

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt. \quad (4.12)$$

Iš to matyti, kad:

$$X(-\omega) = X^*(\omega), \quad (4.13a)$$

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|, \quad \phi(-\omega) = -\phi(\omega). \quad (4.13b)$$

Taigi amplitudžių spektras $|X(\omega)|$ yra lyginė ω funkcija, o fazių spektras $\phi(\omega)$ – nelyginė.

Ryšys tarp Furjė ir Laplaso transformacijų

Pagal (4.8) lygtį $x(t)$ Furjė transformacija apibrėžiama taip:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.14)$$

O pagal (3.3) lygtį $x(t)$ dvipusė Laplaso transformacija yra:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \quad (4.15)$$

Palyginus (4.14) ir (4.15) lygtis, matyti, kad Furjė transformacija yra atskiras Laplaso transformacijos atvejis, kai $s = j\omega$. Kitaip tariant, Laplaso transformacija gali būti laikoma Furjė transformacijos apibendrinimu, kuriuo dažnis $j\omega$ pakeičiamas kompleksiniu kintamuoju $s = \sigma + j\omega$. Šis kintamasis dažnai vadinamas kompleksiniu dažniu.

4.4. Tolydinės Furjė transformacijos savybės

Furjė transformacijos savybės panašios į Laplaso transformacijos (žr. 3.4 poskyrį). Pagrindinės savybės pateiktos 4.1 lentelėje, o kai kurių dažniau sutinkamų signalų Furjė transformacijos – 4.2 lentelėje.

Beje, daugelio signalų Furjė transformaciją galima rasti ir be standartinių transformacijų lentelės – tiesiog naudojant MATLAB paketą. Pavyzdžiui, norint sužinoti šuolinės funkcijos Furjė transformaciją, galima pasinaudoti tokia komanda:

```
syms t v w x; u0=sym('Heaviside(t)'); Fw=fourier(u0).
```

Įvykdžius šią komandą, MATLAB pateikia tokį atsakymą:

$F_w =$

$\pi \cdot \text{Dirac}(w) - i/w.$

4.1 lentelė. Furjė transformacijos savybės

Savybė	Signalas	Transformacija
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Tiesiškumas	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
Postūmis tam tikru laiku	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Postūmis dažnio ašyje	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Laiko ašies mastelio keitimas	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Laiko ašies apvertimas	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Dualumas	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Diferencijavimas t atžvilgiu	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Diferencijavimas ω atžvilgiu	$-jt x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integravimas	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$
Sąsūka	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
Sandauga	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Šis MATLAB užrašas identiškas 4.2 lentelėje pateiktam reiškiniui:

$$u(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

4.2 lentelė. Furjė transformacijos poros

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi \delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$u(t)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$u(-t)$	$\pi \delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$
$e^{-at} u(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$t e^{-at} u(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$e^{-a t }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
$e^{-at^2}, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2 / 4a}$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$2a \frac{\sin \omega a}{\omega a}$
$\frac{\sin at}{\pi t}$	$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega < a \\ 0 & \omega > a \end{cases}$

4.5. Dažninės TSS charakteristikos

Apibrėžimas

Kaip aptarta 2.2 poskyryje, tolydinės TSS išėjimo signalas $y(t)$ lygus įėjimo signalo $x(t)$ ir impulsinės charakteristikos $h(t)$ sąsūkai:

$$y(t) = x(t) * h(t). \quad (4.16)$$

Pritaikius sąsūkos savybę (žr. 4.1 lentelę), gaunama:

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega), \quad (4.17)$$

čia $Y(\omega)$, $X(\omega)$ ir $H(\omega)$ yra atitinkamai $y(t)$, $x(t)$ ir $h(t)$ Furjė transformacijos. Iš (4.17) lygties matyti, kad

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}. \quad (4.18)$$

Funkcija $H(\omega)$ vadinama sistemos (kompleksine) dažnine charakteristika. Tarkime, kad

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta_H(\omega)}. \quad (4.19)$$

$|H(\omega)|$ vadinama sistemos dažnine amplitudės charakteristika (DACH), o $\theta_H(\omega)$ – dažnine fazės charakteristika (DFCh).

Signalų perdavimas be iškraipymo

Tam, kad TSS perduotų signalą jo neiškraipydama, reikalaujama, kad sistemos išėjime būtų tiksliai atkurta įėjimo signalo forma. O signalo amplitudė gali skirtis ir jam leidžiama vėluoti. Taigi, jei $x(t)$ yra įėjimo signalas, reikalingas toks išėjimo signalas:

$$y(t) = Kx(t - t_d), \quad (4.20)$$

čia t_d – vėlinimas, o $K (> 0)$ – stiprinimo koeficientas (konstanta).

Abiem (4.20) lygties pusėms pritaikius Furjė transformaciją, gaunama:

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_d} X(\omega). \quad (4.21)$$

Kaip matyti iš (4.17) lygties, norint perduoti signalą be iškraipymo, sistema turi tenkinti tokią sąlygą:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta_H(\omega)} = Ke^{-j\omega t_d}. \quad (4.22)$$

Taigi

$$|H(\omega)| = K, \quad \theta_H(\omega) = -j\omega t_d. \quad (4.23)$$

Kitaip tariant, $H(\omega)$ amplitudė turi būti pastovi visame dažnių diapazone, o $H(\omega)$ fazė turi tiesiškai priklausyti nuo dažnio.

4.6. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

4.1. Raskite signalo $x(t) = \cos \omega_0 t$ skleidinį kompleksinės eksponentės Furjė eilute.

Sprendimas

Pritaikius Eulerio formulę, galima užrašyti:

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Taigi signalo $\cos \omega_0 t$ kompleksiniai Furjė koeficientai yra:

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_{-1} = \frac{1}{2}, \quad c_k = 0, \quad |k| \neq 1.$$

Atsakymą galima patikrinti MATLAB paketu, skaičiuojant vidutinę signalo vertę c_0 ir pirmųjų trijų harmonikų koeficientus c_1 , c_2 , c_3 . Eksponentinės Furjė eilutės koeficientams rasti galima pasinaudoti MATLAB komanda **int(x,t,a,b)**, kurioje **x** žymi integruojamą funkciją, **t** yra simbolinio reiškinio kintamasis, **a** ir **b** – skaitinės vertės apibrėžtinio integralo rėžiams. Visa MATLAB komanda atrodo taip:

```
syms t          % Apibrėžiamo simbolinį kintamąjį t

T=1;           % Signalo periodas

w0=2*pi/T;     % Kampinis dažnis

for k=0:3      % Skaičiuojame nuolatinę dedamąją ir tris pirmąsias
    harmonikas

    Ck=(1/T)*int(cos(w0*t)*exp(-i*w*k*t), t, 0, 1) % Eksponentinė Furjė
    eilutė, (4.2) sąryšis

end
```

MATLAB komandiniame lange atsiranda užrašas:

$$Ck = 0 \quad Ck = 1/2 \quad Ck = 0 \quad Ck = 0.$$

Šios MATLAB paketo parodytos vertės reiškia, kad $c_k = 1/2$ yra vienintelė nenulinė spektro dedamoji. Be to, kadangi $\cos \omega_0 t$ yra lyginė funkcija, visi koeficientai c_k yra realieji ir $c_{-k} = c_k = 1/2$. Todėl galima užrašyti:

$$\begin{aligned} x(t) &= \dots + 0 + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + 0 + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + 0 + \dots \\ &= \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

4.2. Raskite signalo $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ Furjė transformaciją.

Sprendimas

4.2 lentelėje randame formulę: $\delta(t) \leftrightarrow 1$. Ten pat pateikta formulė ir Furjė transformacijos dualumo savybei apibūdinti:

$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega).$$

Šiai lygčiai pritaikius formulę, nusakančią postūmio dažnio ašyje savybę, gaunama:

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0).$$

Gautas atsakymas sutampa su atitinkamu įrašu 4.2 lentelėje.

4.3. Duota grandinė, kurios įėjimo ir išėjimo signalai susiję taip:

$$\frac{d^2}{dt^2} v_o(t) + 5 \frac{d}{dt} v_o(t) + 6v_o(t) = 10v_i(t). \quad (4.24)$$

Taikydami Furjė transformacijos metodą, raskite išėjimo signalą $v_o(t)$, grandinės įėjime veikiant $v_i(t) = 2e^{-t}u(t)$.

Sprendimas

Abiem (4.24) lygties pusėms pritaikome Furjė transformaciją:

$$[(j\omega^2) + 5j\omega + 6] V_o(\omega) = 10 V_i(\omega) = 10 \frac{2}{j\omega + 1},$$

$$V_o(\omega) = \frac{20}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)}. \quad (4.25)$$

Skaidos operacijai atlikti, įvedę pakeitimą $j\omega = s$, vykdome tokią MATLAB komandą:


```
syms s; collect((s+1)*(s+2)*(s+3))
ans =
s^3+6*s^2+11*s+6
num=[0 0 0 20]; den=[1 6 11 6]; [num,den]=residue(num,den); fprintf(' \n');...
fprintf('r1 = %4.2f \t', num(1)); fprintf('p1 = %4.2f', den(1)); fprintf(' \n');...
fprintf('r2 = %4.2f \t', num(2)); fprintf('p2 = %4.2f', den(2)); fprintf(' \n');...

fprintf('r3 = %4.2f \t', num(3)); fprintf('p3 = %4.2f', den(3))
r1 = 10.00 p1 = -3.00
r2 = -20.00 p2 = -2.00
r3 = 10.00 p3 = -1.00
```

Taigi (4.25) trupmeną galima išskaidyti taip:

$$V_o(\omega) = \frac{10}{j\omega+1} - \frac{20}{j\omega+2} + \frac{10}{j\omega+3}. \quad (4.26)$$

(4.26) lygčiai belieka pritaikyti atvirkštinę Furjė transformaciją:

$$v_o(t) = 10e^{-t} - 20e^{-2t} + 10e^{-3t} = 10(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t})u(t).$$

4.4. Pasinaudodami Furjė transformacija, išspęskite 2.23 uždavinį.

Sprendimas

Sistema aprašoma tokia diferencialine lygtimi:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t).$$

Šiai lygčiai pritaikius Furjė transformacijos formules, gaunama:

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega) + j\omega X(\omega).$$

Remiantis (4.18) formule, kompleksinė dažninė charakteristika $H(\omega)$ yra:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1 + j\omega}{2 + j\omega} = \frac{2 + j\omega - 1}{2 + j\omega} = 1 - \frac{1}{2 + j\omega}.$$

$H(\omega)$ pritaikius atvirkštinę Furjė transformaciją, gaunama tokia impulsinė charakteristika:

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t).$$

4.5. Apskaičiuokite 4.1 pav. pavaizduotos grandinės perdavimo funkciją $G(s)$, jei $R_1 = 200 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 50 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 25 \text{ nF}$, $C_2 = 10 \text{ nF}$. Kompleksinį kintamąjį s pakeitę $j\omega$, nubraižykite grandinės DACH.

Sprendimas

Pradinę grandinę pakeitę ekvivalentine grandine kompleksinio dažnio s srityje (4.2 pav.), sudarome mazginių įtampų lygtis mazgams 1 ir 2:

$$\frac{V_1(s) - V_i(s)}{R_1} + \frac{V_1}{1/sC_1} + \frac{V_1(s) - V_o(s)}{R_2} + \frac{V_1(s) - V_2(s)}{R_3} = 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{V_2(s) - V_1(s)}{R_3} = \frac{V_o(s)}{1/sC_2}. \quad (4.28)$$

4.1 pav. Pradinė grandinė

4.2 pav. Transformuotoji grandinė

Kadangi $V_2(s) = 0$, (4.28) lygtį galima perrašyti taip:

$$V_1(s) = (-sR_3C_2)V_o(s). \quad (4.29)$$

(4.29) lygtį įstatę į (4.27), pertvarę ir sutraukę panašius narius, gauname:

$$\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + sC_1 \right) (-sR_3C_2) - \frac{1}{R_2} \right] V_o(s) = \frac{1}{R_1} V_i(s).$$

Taigi

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-1}{R_1 [(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + sC_1)(sR_3C_2) + 1/R_2]}. \quad (4.30)$$

Trupmenos (4.30) lygtyje vardikliui supaprastinti galima įvykdyti tokią MATLAB komandą:

syms s; R1=2*10^5; R2=4*10^4; R3=5*10^4; C1=25*10^(-9);

C2=10*10^(-9);

Ds=R1*((1/R1+1/R2+1/R3+s*C1)*(s*R3*C2)+1/R2); simplify(Ds)

ans =

1/200*s+188894659314785825/
75557863725914323419136*s^2+5

Supaprastiname koeficientą prie s^2 :

188894659314785825/75557863725914323419136

ans =

2.5000e-006

1/200 % Supaprastiname koeficientą prie s^2

ans =

0.0050

Dabar perdavimo funkciją galima užrašyti taip:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-1}{2,5 \times 10^{-6} s^2 + 5 \times 10^{-3} s + 5}.$$

Kintamąjį s pakeitus $j\omega$,

$$G(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{-1}{2,5 \times 10^{-6} \omega^2 - j 5 \times 10^{-3} \omega + 5}. \quad (4.31)$$

Grandinės DACH (t. y. perdavimo funkcijos $G(j\omega)$ modulio priklausomybės nuo kampinio dažnio ω) grafikui nubraižyti vykdome šią MATLAB komandą:

```
w=1:10:10000; Gs=-1./
(2.5.*10.^(-6).*w.^2-5.*j.*10.^(-3).*w+5);...

semilogx(w,abs(Gs)); xlabel('w'); ylabel('|Vo/Vi|'); grid
```

DACH grafikas pateiktas 4.3 pav. Iš jo matyti, kad duotoji grandinė su operaciniu stiprintuvu yra antrosios eilės žemutinių dažnių filtras, kurio ribinis kampinis dažnis apytiksliai lygus 700 rad/s.

4.3 pav. Grandinės DACH

4.7. Uždaviniai

4.6. Raskite šių signalų skleidinius kompleksinės eksponentės Furjė eilute:

(a) $x(t) = \sin \omega_0 t$;

(b) $x(t) = \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right)$;

(c) $x(t) = \cos 4t + \sin 6t$;

(d) $x(t) = \sin^2 t$.

Ats. (a) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$, $c_1 = \frac{1}{2j}$, $c_{-1} = -\frac{1}{2j}$, $c_k = 0$, $|k| \neq 1$;

(b) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$, $c_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j)$, $c_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)$, $c_k = 0$, $|k| \neq 1$;

(c) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$, $c_{-3} = -\frac{1}{2j}$, $c_{-2} = c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{2j}$, kiti $c_k = 0$;

(d) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$, $c_{-1} = c_1 = -\frac{1}{4}$, $c_0 = \frac{1}{2}$, kiti $c_k = 0$.

4.7. Periodinių stačiakampių impulsų sekai $x(t)$, pavaizduotai 4.4 pav., apskaičiuokite:

(a) $x(t)$ skleidinį kompleksinės eksponentės Furjė eilute;

(b) $x(t)$ skleidinį trigonometriniu Furjė eilute.

Ats. (a) $\frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t};$

(b) $\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right).$

4.4 pav.

4.8. Periodinių stačiakampių impulsų sekai $x(t)$, pavaizduotai 4.5 pav., apskaičiuokite:

- (a) $x(t)$ skleidinį kompleksinės eksponentės Furjė eilute;
- (b) $x(t)$ skleidinį trigonometrine Furjė eilute.

Ats. (a) $\frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t};$

(b) $\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right).$

4.5 pav.

4.9. Periodinių stačiakampių impulsų sekai $x(t)$, pavaizduotai 4.6 pav., apskaičiuokite:

- (a) $x(t)$ skleidinį kompleksinės eksponentės Furjė eilute.
- (b) $x(t)$ skleidinį trigonometriniu Furjė eilute.

Ats. (a) $\frac{2A}{j\pi} + \frac{A}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t},$

(b) $\frac{4A}{\pi} + \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right).$

4.6 pav.

4.10. Periodinė delta impulsų seka $\delta_{T_0}(t)$, pavaizduota 4.7 pav., apibūdinama taip:

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0).$$

(a) Raskite $\delta_{T_0}(t)$ skleidinį kompleksinės eksponentės Furjė eilute.

(b) Raskite $\delta_{T_0}(t)$ skleidinį trigonometrine Furjė eilute.

Ats. (a) $\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0};$

(b) $\frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$

4.7 pav.

4.11. Duota trikampių impulsų seka $x(t)$, pavaizduota 4.8 pav. Taikydami diferencijavimo metodą, raskite:

(a) $x(t)$ skleidinį kompleksinės eksponentės Furjė eilute;

(b) $x(t)$ skleidinį trigonometrine Furjė eilute.

Ats. (a) $\frac{A}{2} - \frac{2A}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{j(2m+1)\omega_0 t};$

$$(b) \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)\omega_0 t.$$

4.8 pav.

4.12. Duota trikampių impulsų seka $x(t)$, pavaizduota 4.9 pav. Taikydami diferencijavimo metodą, raskite $x(t)$ skleidinį trigonometrine Furjė eilute.

$$Ats. \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

4.9 pav.

4.13. Raskite ir nubraižykite šios periodinės impulsų sekos $x(t)$, pavaizduotos 4.10 pav., amplitudžių spektrą, kai (a) $d = T_0 / 4$ ir (b) $d = T_0 / 8$.

$$\text{Ats. (a) } |c_k| = \frac{A}{4} \left| \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4} \right|; \quad \text{(b) } |c_k| = \frac{A}{8} \left| \frac{\sin(k\pi/8)}{k\pi/8} \right|.$$

4.10 pav.

4.14. Tarkime, kad $x_1(t)$ ir $x_2(t)$ – periodiniai signalai, kurių periodas – T_0 , o jų skleidiniai kompleksinės eksponentės Furjė eilute yra tokie:

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \quad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Įrodykite, kad signalas $x(t) = x_1(t) x_2(t)$ irgi yra periodinis su tuo pačiu periodu T_0 , todėl šį signalą galima užrašyti taip:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

čia c_k apibrėžiamas taip:

$$c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m}.$$

4.15. Raskite 4.11 pav. pavaizduoto stačiakampio impulso $x(t)$, apibrėžiamo kaip

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases},$$

Furjė transformacija.

Ats. $2a \frac{\sin \omega a}{\omega a}.$

4.11 pav.

4.16. Raskite 4.12 pav. pavaizduoto signalo $x(t)$, apibrėžiamo kaip

$$x(t) = \frac{\sin(at)}{\pi t},$$

Furjė transformacija.

Ats. $\begin{cases} 1 & |\omega| < a, \\ 0 & |\omega| > a. \end{cases}$

4.12 pav.

4.17. Raskite 4.13 pav. pavaizduoto signalo $x(t)$, apibrėžiamo kaip

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0,$$

Furjė transformaciją.

Ats. $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$

4.13 pav.

4.18. Raskite 4.14 pav. pavaizduoto signalo $x(t)$, apibrėžiamo kaip

$$x(t) = \frac{1}{a^2 + t^2},$$

Furjė transformaciją.

Ats. $\frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.$

4.14 pav.

4.19. Raskite šių signalų Furjė transformacijas:

(a) $x(t) = e^{-j\omega_0 t};$ (b) $x(t) = \cos \omega_0 t;$

(c) $x(t) = \sin \omega_0 t.$

Ats. (a) $2\pi \delta(\omega + \omega_0);$ (b) $\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)];$

(c) $-j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$

4.20. Raskite periodinio signalo $x(t)$, kurio periodas – T_0 , Furjė transformaciją.

Ats. $2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0).$

4.21. Raskite 4.7 pav. pavaizduotos periodinės delta impulsų sekos, apibrėžiamos kaip

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0),$$

Furjė transformaciją.

Ats. $\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0).$

4.22. Raskite šių signalų Furjė transformacijas:

(a) $x(t) = u(-t);$

(b) $x(t) = e^{at}u(-t), \quad a > 0.$

Ats. (a) $\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega};$ (b) $\frac{1}{a - j\omega}.$

4.23. Duotas realusis signalas $x(t)$, kuriam galima užrašyti:

$$X(\omega) = \Im[x(t)] = A(\omega) + jB(\omega),$$

$$x(t) = x_l(t) + x_n(t),$$

čia $x_l(t)$ ir $x_n(t)$ – lyginė ir nelyginė $x(t)$ dedamosios. Įrodykite, kad

$$x_l(t) \leftrightarrow A(\omega),$$

$$x_n(t) \leftrightarrow jB(\omega).$$

4.24. Raskite signalo, aprašomo Gauso funkcija

$$x(t) = e^{-at^2}, \quad a > 0,$$

Furjė transformaciją.

$$\text{Ats. } \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2 / 4a}.$$

4.25. Duota tolydinė tiesinė stacionarioji sistema, aprašoma taip:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t).$$

Pasinaudodami Furjė transformacija, raskite sistemos atsaką $y(t)$ į šiuos signalus:

$$(a) \ x(t) = e^{-t}u(t);$$

$$(b) \ x(t) = u(t).$$

$$\text{Ats. } (a) \ (e^{-t} - e^{-2t})u(t); \quad (b) \ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t).$$

4.26. Duota sistema, aprašyta 4.25 uždavinyje. Sistemos įėjime veikia periodinė stačiakampių impulsų seka, pavaizduota 4.15 pav. Raskite sistemos atsaką į šį signalą pirmosios ir trečiosios harmonikų amplitudes.

$$\text{Ats. } D_1 = 1,71; \quad D_3 = 0,22.$$

4.15 pav.

4.27. Idealiaji fazės posūmio -90° kampu grandinė (žr. 4.16 pav.) pasižymi tokia dažnine charakteristika:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j(\pi/2)} & \omega > 0 \\ e^{j(\pi/2)} & \omega < 0 \end{cases}.$$

- (a) Raskite grandinės impulsinę charakteristiką $h(t)$.
 (b) Raskite grandinės atsaką $y(t)$ į bet koki signalą $x(t)$.
 (c) Raskite grandinės atsaką $y(t)$ į signalą $x(t) = \cos \omega_0 t$.

Ats. (a) $\frac{1}{\pi t}$; (b) $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$; (c) $\sin \omega_0 t$.

4.16 pav.

LITERATŪRA

1. DUMBRAVA, V. *Signalai ir sistemos*. I dalis. Kaunas: Technologija, 2003. 285 p.
2. JACOB, J. M. *Advanced AC Circuits and Electronics: Principles and Applications*. New York: Thomson Delmar Learning, 2004. 455 p.
3. KARRIS, S. T. *Signals and Systems with MATLAB® Computing and Simulink® Modeling*, 4th ed. Fremont: Orchard Publications, 2008. 686 p.
4. LATHI, B. P. *Signal Processing and Linear Systems*. New York: Oxford University Press, 1998. 850 p.
5. LIPEIKA, A. *Signalų ir sistemų dažninė analizė*. Vilnius: Technika, 2003. 157 p.
6. MINIOTAS, D. *Elektros grandinių analizė*. Vilnius: Technika, 2009. 260 p.
7. RAIŠUTIS, R.; TUMŠYS, O.; SVEIKATA, J. *MATLAB grandinių teorijoje*. Kaunas: Technologija, 2007. 67 p.
8. SVEIKATA, J. *Tiesinių grandinių teorija, 2-asis leidimas*. Kaunas: Technologija, 2006. 272 p.
9. БАСКЕЙ, В. Я.; ВАСЮКОВ, В. Н.; ЗОТОВ, Л. Г.; МЕРЕНКОВ, В. М.; РАЗИНКИН, В. П.; ЯКОВЛЕВ, А. Н. *Радиотехнические цепи и сигналы: задачи и задания*. Москва: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. 348 с.
10. РУМЯНЦЕВ, К. Е. *Прием и обработка сигналов: сборник задач и упражнений*. Москва: Издательский центр «Академия», 2006. 368 с.