

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Artūras VENSKUS

PRISITAIKANČIŲ KONSTRUKCIJŲ OPTIMIZAVIMAS. SĄSAJOS SU PROJEKTAVIMO STANDARTAIS

DAKTARO DISERTACIJA

TECHNOLOGIJOS MOKSLAI,
STATYBOS INŽINERIJA (02T)



Vilnius LEIDYKLA
TECHNIKA 2011

Disertacija rengta 2004–2011 metais Vilniaus Gedimino technikos universitete.

Disertacija ginama eksternu.

Mokslinis konsultantas

prof. habil. dr. Juozas ATKOČIŪNAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Vilniaus Gedimino technikos universiteto Statybos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo taryba:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Gintaris KAKLAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Nariai:

prof. dr. Donatas ČYGAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T),

prof. habil. dr. Audronis Kazimieras KVEDARAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T),

prof. habil. dr. Vytautas STANKEVIČIUS (Kauno technologijos universitetas, statybos inžinerija – 02T),

prof. habil. dr. Vitauts TAMUZS (Latvijos universiteto Polimerų mechanikos institutas, medžiagų inžinerija – 08T).

Disertacija bus ginama viešame Statybos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo tarybos posėdyje **2011 m. birželio 14 d. 10 val.** Vilniaus Gedimino technikos universiteto senato posėdžių salėje.

Adresas: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva.

Tel.: (8 5) 274 4956; faksas (8 5) 270 0112; el. paštas doktor@vgtu.lt

Pranešimai apie numatomą ginti disertaciją išsiusti 2011 m. gegužės 13 d.

Disertaciją galima peržiūrėti interneto svetainėje <http://dspace.vgtu.lt> ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto bibliotekoje (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lietuva).

VGTU leidyklos TECHNIKA 1887-M mokslo literatūros knyga

ISBN 978-9955-28-863-3

© VGTU leidykla TECHNIKA, 2011

© Artūras Venskus, 2011

venartas@yahoo.fr

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Artūras VENSKUS

OPTMIZATION METHODS OF SHAKEDOWN STRUCTURES IN THE CONTEXT OF STANDARDS

DOCTORAL DISSERTATION

TECHNOLOGICAL SCIENCES,
CIVIL ENGINEERING (02T)



Vilnius LEIDYKLA
TECHNIKA 2011

Doctoral dissertation was prepared at Vilnius Gediminas Technical University in 2004–2011.

The dissertation is defended as an external work.

Scientific Consultant

Prof Dr Habil Juozas ATKOČIŪNAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

The Dissertation Defence Council of Scientific Field of Civil Engineering of Vilnius Gediminas Technical University:

Chairman

Prof Dr Habil Gintaris KAKLAUSKAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

Members:

Prof Dr Donatas ČYGAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T),

Prof Dr Habil Audronis Kazimieras KVEDARAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T),

Prof Dr Habil Vytautas STANKEVIČIUS (Kaunas University of Technology, Civil Engineering – 02T),

Prof Dr Habil Vitauts TAMUZS (University of Latvia, Institute of Polymer Mechanics, Materials Engineering – 08T).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Dissertation Defence Council of Civil Engineering in the Senate Hall of Vilnius Gediminas Technical University at **10 a. m. on 14 June 2011.**

Address: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania.

Tel.: +370 5 274 4956; fax +370 5 270 0112; e-mail: doktor@vgtu.lt

A notification on the intend defending of the dissertation was send on 13 May 2011.

A copy of the doctoral dissertation is available for review at the Internet website <http://dspace.vgtu.lt> and at the Library of Vilnius Gediminas Technical University (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lithuania).

Reziumė

Disertaciniame darbe išplėtota vieninga tamprių-plastinių prisitaikančių sistemų optimizavimo su stiprumo, standumo ir klumpamosios galios sąlygomis, taikant ekstreminius energinius principus, matematinio programavimo teoriją, šiuolaikines kompiuterines technologijas ir sąsajas su projektavimo standartais, metodika. Darbe parodyta, kad prisitaikomumo teorija yra bendriausias metodinis įrankis skirtas statybinių konstrukcijų skaičiavimui nuo įvairių apkrovų, įgalinantis išvengti detalios apkrovimo istorijos nagrinėjimo.

Disertaciją sudaro įvadas, penkeri skyriai, rezultatų apibendrinimas, naudotos literatūros ir autoriaus publikacijų disertacijos tema sąrašai ir keturi priedai.

Įvadiniamе skyriuje aptariama tiriamoji problema, darbo aktualumas, aprašomas tyrimų objektas, formuluojamas darbo tikslas bei uždaviniai, aprašoma tyrimų metodika, darbo mokslinis naujumas, darbo rezultatų praktinė reikšmė, ginamieji teiginiai. Įvado pabaigoje pristatomos disertacijos tema autoriaus paskelbtos publikacijos ir pranešimų konferencijose sąrašas bei disertacijos struktūra.

Pirmasis skyrius skirtas literatūros apžvalgai. Jame atlikta prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo metodų apžvalga, išryškinta būtinybė pasitelkti sąsajas tarp teorinių optimizavimo metodų ir projektavimo standartų.

Antrajame skyriuje aptariama konstrukcijų diskretizacija, sudaryti patobulinti projektinio ir patikrinamojo uždavinių matematiniai modeliai.

Trečiajame skyriuje parodyta sąsaja tarp statybos inžinerijoje naudojamų apkrovų derinių ir kartotinės-kintamosios apkrovos. Pasiūlyta metodika leidžianti integruotai projektuoti prisitaikančias konstrukcijas įvertinant stiprumą, standumą ir klumpamąją galią.

Ketvirtajame skyriuje aprašomos autoriaus sukurtos netiesinio programavimo programos, aptariama jų valdymo specifika.

Penktas skyrius skirtas dvimatės plokštės patikrinamajam uždaviniui. Pasiūlytas naujas sprendimo algoritmas kombinuojantis Mizeso ir Treska takumo sąlygas.

Disertacijos tema paskelbta 12 straipsnių: šeši – leidiniuose įtrauktuose į Thomson ISI sąrašą; vienas konferencijų medžiagoje, referuotoje Thomson ISI duomenų bazėje; vienas – recenzuojamoje užsienio tarptautinės konferencijos medžiagoje; vienas – recenzuojamame užsienio mokslo leidinyje; vienas – recenzuojamoje Lietuvos tarptautinės konferencijos medžiagoje; du – nerenzuojamoje Lietuvos konferencijos medžiagoje. Disertacijos tema perskaityti 8 pranešimai Lietuvos bei kitų šalių konferencijose.

Abstract

The optimization methodology of shakedown structures evaluating strength, stiffness and stability constraints and unifying extremum energy principles, mathematical programming theory, state-of-the-art computer technologies and design standards was developed in the dissertation. There are shown in the work that shakedown theory is a generalized tool for calculation of civil engineering structures under different loading conditions that avoid detailed investigation of loading history.

The dissertation consists of six parts including Introduction, 5 chapters, Conclusions, References and 4 Annexes.

The introduction reveals the investigated problem, importance of the thesis and the object of research and describes the purpose and tasks of the paper, research methodology, scientific novelty, the practical significance of results examined in the paper and defended statements. The introduction ends in presenting the author's publications on the subject of the defended dissertation, offering the material of made presentations in conferences and defining the structure of the dissertation.

Chapter 1 revises used literature. The optimization methods of shakedown structures are reviewed and a demand of linkage between theoretical optimization methods and standards is highlighted.

Chapter 2 describes the discretization of structures, the mathematical models for improved design and check problems was created.

In the Chapter 3 the equivalence between load combinations of civil engineering standards and repeated variable load is shown. The methodology enabling integrated design of shakedown structures, with included strength, stiffness and stability constraints, is proposed.

Chapter 4 describes authors created nonlinear programming software and its usage peculiarity.

Chapter 5 dedicated to plate check problem. A new algorithm combining von Mises and Tresca yield is proposed.

12 articles focusing on the subject of the discussed dissertation are published: six articles – in the Thomson ISI register, one article – in conference material in Thomson ISI data base, one article – in material reviewed during international conference, one article in the reviewed international edition; one article during an international conference in Lithuania, two articles during a national conference. 8 presentations on the subject have been given in conferences at national and international level.

Žymėjimai

Pagrindiniai simboliai

Matricos

A – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica;
 D – konstrukcijos pasiduodamumo matrica;
 G – liekamųjų įrašų influentinė matrica;
 H – liekamųjų poslinkių influentinė matrica;
 K – konstrukcijos globalinė standumo matrica;
 α – įrašų influentinė matrica;
 β – poslinkių influentinė matrica;
 Φ – takumo sąlygų matrica.

Vektoriai

F_{sup} , F_{inf} – jėgų kitimo apatinių ir viršutinių ribų reikšmių vektoriai;
 M_0 – ribinių momentų vektorius;
 N_0 – ribinių ašinių jėgų vektorius;
 S – įrašų vektorius;
 S_r – liekamųjų įrašų vektorius;
 S_0 – ribinių įrašų vektorius;

$\mathbf{u}$ – poslinkių vektorius;
 $\mathbf{u}_r$ – liekamųjų poslinkių vektorius;
 λ – Lagranžo daugiklių vektorius, plastinių daugiklių vektorius;
 $\boldsymbol{\theta}$ – deformacijų vektorius;
 $\boldsymbol{\theta}_r$ – liekamųjų deformacijų vektorius;
 $\boldsymbol{\theta}_p$ – plastinių deformacijų vektorius.

Skaliariai

E – medžiagos tamprumo modulis;
 V – kūno tūris.

Indeksai

e – tamprusis;
 i – kintamas indeksas;
 j – tampraus hodografo viršūnė, jų aibė J ;
 k – baigtinio elemento indeksas;
 p – plastinis;
 r – liekamasis.

Santrumpos

KKA – kartotinė-kintamoji apkrova;
EN1993 – Europos plieninių konstrukcijų projektavimo standartas;
NEN6771 – Olandų plieninių konstrukcijų projektavimo standartas.

Turinys

IVADAS	1
Tiriamoji problema	1
Darbo aktualumas	2
Tyrimų objektas	2
Darbo tikslas	2
Darbo uždaviniai	2
Tyrimų metodika	3
Darbo mokslinis naujumas ir jo reikšmė	3
Darbo rezultatų praktinė reikšmė	4
Darbo rezultatų aprobavimas	4
Disertacijos struktūra	5
1. PRISITAIKOMUMO TEORIJOS ANALIZĖ	7
1.1. Pagrindinės prisitaikomumo teoremos	8
1.1.1. Melano statinė prisitaikomumo teorema	8
1.1.2. Koiterio kinematinė prisitaikomumo teorema	8
1.2. Prisitaikomumo analizė	9
1.3. Ribojimo metodai	9
1.4. Optimalus projektavimas prisitaikomumo sąlygomis	10
1.5. Dualumas ir matematinis programavimas	11
1.6. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas	12

2. PATOBULINTI PRISITAIKANČIŲ KONSTRUKCIJŲ OPTIMIZAVIMO MODELIAI.....	15
2.1. Diskretinės sistemos įrašos ir deformacijos.....	16
2.2. Tampriųjų įrašų hodografas.....	18
2.3. Kartotinės-kintamosios apkrovos takumo sąlygos	19
2.4. Prisitaikiusios sistemos geometrinės lygtys.....	20
2.5. Projektinio uždavinio matematinis modelis.....	20
2.6. Projektinio uždavinio pavyzdys.....	22
2.7. Patikrinamojo uždavinio matematinis modelis.....	26
2.8. Patikrinamojo uždavinio pavyzdys	27
2.9. Antrojo skyriaus išvados.....	29
3. PRISITAIKANČIŲ KONSTRUKCIJŲ OPTIMIZAVIMAS PROJEKTAVIMO STANDARTUOSE.....	31
3.1. Apkrovų deriniai – kartotinės-kintamosios apkrovos viršūnės.....	32
3.2. Judama apkrova – atskiras kartotinės-kintamosios apkrovos atvejis.....	35
3.3. Vienkartinė apkrova – atskiras kartotinės-kintamosios apkrovos atvejis ..	37
3.4. Stiprumo, standumo ir klumpamosios galios įvertinimas optimizavimo uždaviniuose	38
3.4.1. Optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai	38
3.4.2. Klumpamosios galios skaičiavimas pagal EN1993 projektavimo standartą	39
3.4.3. Klumpamosios galios skaičiavimas pagal NEN6771 projektavimo standartą	41
3.4.4. Klumpamosios galios įvertinimo algoritmas optimizavimo uždaviniuose.....	42
3.4.5. Optimizavimo programų ir MatrixFrame integruotas panaudojimas.....	46
3.4.6. Rėmo projektinio uždavinio pavyzdys	51
3.4.7. Rėmo apkrovos optimizavimo uždavinio pavyzdys	55
3.5. Trečiojo skyriaus išvados	57
4. SUKURTOJI PROGRAMINĖ ĮRANGA	59
4.1. Rozeno projektuojamųjų gradientų algoritmas.....	59
4.2. Rozeno algoritmo valdymo specifiška ir patirtis.....	61
4.3. Pradinių duomenų formavimas programai M0opt1	65
4.4. Pradinių duomenų formavimas programai MaxFopt1	67
4.5. Ketvirtojo skyriaus išvados.....	68

5. PRISITAIKANČIŲ TAMPRIŲJŲ-PLASTINIŲ SIMETRINIŲ PLOKŠČIŲ APKROVOS OPTIMIZAVIMAS	69
5.1. Diskretinės plokštės įrašos ir deformacijos	69
5.2. Pagrindinės priklausomybės ciklinės apkrovos atveju	74
5.3. Analizės uždavinio matematiniai modeliai	75
5.4. Liekamųjų įlinkių ir momentų influentinės matricos	76
5.5. Kartotinės-kintamosios apkrovos optimizavimo algoritmas	77
5.6. Skaitinis pavyzdys	79
5.7. Penktojo skyriaus išvados	81
BENDROSIOS IŠVADOS	83
LITERATŪRA IR ŠALTINIAI	85
AUTORIAUS PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SĄRAŠAS	93
SANTRAUKA ANGLŲ KALBA	95
PRIEDAI ¹	112
A priedas. M0opt1 programos gradientų skaičiavimo paprogramės	113
A1. Tikslų funkcijos skaičiavimo paprogramė	113
A2. Tikslų funkcijos gradiento skaičiavimo paprogramė	114
A3. Apribojimų ir jų gradientų skaičiavimo paprogramė	114
B priedas. MaxFopt1 programos gradientų skaičiavimo paprogramės	117
B1. Tikslų funkcijos skaičiavimo paprogramė	117
B2. Tikslų funkcijos gradiento skaičiavimo paprogramė	118
B3. Apribojimų ir jų gradientų skaičiavimo paprogramė	120
C priedas. Publikacijų bendraautorių sutikimai teikti publikacijas disertacijos gynimui	125
D priedas. Autoriaus publikacijų disertacijos tema kopijos	132

¹Priedai pateikti pridėtoje elektroninėje laikmenoje

Contents

INTRODUCTION	1
Formulation of the problem.....	1
Topicality of the thesis	2
Research object	2
Aim of the work	2
Tasks of the work	2
Methodology of research.....	3
Scientific novelty	3
Practical value	4
Work approbation.....	4
The scope of the scientific work	5
1. REVIEW OF SHAKEDOWN THEORY	7
1.1. The principal shakedown theorems	8
1.1.1. Static shakedown theorem (Melan)	8
1.1.2. Kinematic shakedown theorem (Koiter).....	8
1.2. Shakedown analysis.....	9
1.3. Constraints methods.....	9
1.4. Optimal shakedown design.....	10
1.5. Duality and mathematical programming	11
1.6. Conclusions of Chapter 1 and formulating tasks for the dissertation	12

2. IMPROVED OPTIMIZATION MODELS FOR SHAKEDOWN STRUCTURES	15
2.1. Internal forces and strains of discretised system.....	16
2.2. Locus of elastic forces	18
2.3. Yield conditions of repeated variable load	19
2.4. Geometrical equations of shakedown system	20
2.5. Mathematical model of design problem	20
2.6. Example of design problem	22
2.7. Mathematical model of check problem	26
2.8. Example of check problem	27
2.9. Conclusions of Chapter 2.....	29
3. OPTIMIZATION OF SHAKEDOWN STRUCTURES IN THE CONTEXT OF STANDARDS	31
3.1. Load combinations – repeated variable load bounds.....	32
3.2. Moving load – separate case of repeated variable load	35
3.3. Monotonically increasing loading – separate case of repeated variable load.....	37
3.4. Strength, stiffness and stability evaluation in optimization problems	38
3.4.1. Mathematical models of optimization problems	38
3.4.2. Stability calculation according to EN1993 standard	39
3.4.3. Stability calculation according to NEN6771 standard	41
3.4.4. Stability evaluation algorithm for optimization problems.....	42
3.4.5. Integrated application of MatrixFrame and optimization software	46
3.4.6. Example of frame design problem	51
3.4.7. Example of frame check problem.....	55
3.5. Conclusions of Chapter 3.....	57
4. CREATED SOFTWARE	59
4.1. Rosen project gradient method	59
4.2. Rosen algorithm particularities and calculation experience	61
4.3. Initial data preparation for software module M0opt1	65
4.4. Initial data preparation for software module MaxFopt1	67
4.5. Conclusions of Chapter 4.....	68
5. LOAD OPTIMIZATION OF ELASTIC-PLASTIC AXISYMMETRIC PLATES AT SHAKEDOWN	69
5.1. Internal forces and strains of discretised plate.....	69
5.2. The main dependencies in the case of cyclic loading.....	74
5.3. The mathematical models of the analysis problem.....	75

5.4. The influence matrixes of the residual displacements and residual moments	76
5.5. The algorithm of repeated variable load optimization	77
5.6. Numerical example	79
5.7. Conclusions of Chapter 5	81
GENERAL CONCLUSIONS	83
REFERENCES	85
LIST OF PUBLICATIONS BY THE AUTHOR ON THE TOPIC OF THE DISSERTATION	93
SUMMARY IN ENGLISH	95
ANNEXES ¹	112
Annex A. Gradient calculation subroutines for software M0opt1	113
A1. Objective function calculation subroutine	113
A2. Objective function gradient calculation subroutine	114
A3. Constraints and its gradients calculation subroutine	114
Annex B. Gradient calculation subroutines for software MaxFopt1	117
B1. Objective function calculation subroutine	117
B2. Objective function gradient calculation subroutine	118
B3. Constraints and its gradients calculation subroutine	120
Annex C. The coauthors agreements to present publications for the dissertation defence	125
Annex D. Copies of scientific publications by the author on the topic of the dissertation	132

¹ The annexes are supplied in the enclosed compact disc

Ivadas

Tiriamoji problema

Konstrukcijų, patiriančių kintamus kartotinius mechaninius ir kitus poveikius, stiprumo, standumo ir klumpamosios galios problemų sprendimas glaudžiai susietas su prisitaikomumo teorija. Šią teoriją visapusiškai naudoti dar ir dabar trukdo nepakankama matematinė kai kurių uždavinių formalizacija ir nenuoseklus matematinio programavimo teorijos ir jos metodų panaudojimas.

Prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinius spręsti sudėtinga dar ir todėl, kad disipacinių sistemų įtempių ir deformacijų būvis priklauso nuo apkrovimo istorijos. Šie sunkūs optimizavimo uždaviniai gali būti sprendžiami panaudojant ekstreminius energetinius principus ir matematinio programavimo teoriją.

Taigi disertaciniame darbe siekiama sukurti vieningą tamprių-plastinių prisitaikančių sistemų optimizavimo su standumo ir klumpamosios galios sąlygomis, taikant ekstreminius energinius principus, matematinio programavimo teoriją, skaitinius metodus ir šiuolaikines kompiuterines technologijas, metodiką.

Darbo aktualumas

Prisitaikančių konstrukcijų optimalaus projektavimo aspektai, įvertinant stiprumo ir standumo sąlygas, išsamiai nagrinėti mokslinėje literatūroje. Tuo tarpu tampriųjų plastinių rėmų optimizavimo uždaviniuose klumpamosios galios sąlygų įvertinimas, kai apkrova kartotinė-kintamoji, ir dabartiniu metu lieka aktualia moksline problema. Pavyzdžiui, pagal EN1993 yra leidžiama projektuoti tampriuosius plastinius rėmus, tačiau čia nepilnai detalizuota metodika bei algoritmai prisitaikančių konstrukcijų stabilumo įvertinimui. Tai sąlygojo ir šios disertacijos mokslinių tyrimų krypties ir metodų pasirinkimą, būtent, prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo metodai projektavimo standartų kontekste.

Tyrimų objektas

Tampriai plastinių prisitaikančių statybinių konstrukcijų nauji optimizavimo teoriniai sprendimai ir metodai bei jų tobulinimas ir su tuo susijusių ekstreminių energinių principų, matematinio programavimo teorijos bei šiuolaikinių kompiuterinių technologijų plėtotė ir taikymas projektavimo standartų kontekste.

Darbo tikslas

1. Patobulinti esamus prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo matematinius modelius įvertinančius stiprumą ir standumą, sukurti naują optimizavimo metodiką įvertinančią ir klumpamąją galią (ekscentrinį gniuždymą).
2. Integruoti sukurta programinę įrangą į kompiuterinį paketą MatrixFrame ir parodyti praktinių uždavinių sprendimo galimybę pritaikant egzistuojančius projektavimo standartus.
3. Atlikti prisitaikančios konstrukcijos integruotą optimizavimą pagal projektavimo standartus įvertinant stiprumo, standumo ir klumpamosios galios sąlygas.

Darbo uždaviniai

Darbo tikslui pasiekti darbe reikia spręsti šiuos uždavinius:

1. Sukurti prisitaikančių konstrukcijų tikrinamojo ir projekcinio optimizavimo uždavinių patikslintus matematinius modelius, į standumo apribojimus įjungiant suminius (tamprius ir liekamuosius) poslinkius.
2. Skaitinėje analizėje atsisakyti skerspjūvių idealizacijos, įvesti profiliuotųjų realius skerspjūvio parametrus.
3. Sukurti programinę įrangą prisitaikančių konstrukcijų analizei ir optimizavimui.
4. Atlikti skaičiavimus, iliustruojančius prisitaikančių strypinių konstrukcijų optimizavimą.
5. Sukurti metodiką, leidžiančią autoriaus programinės įrangos apskaičiuotus plastinio būvio kintamuosius (liekamąsias įrašas ir liekamuosius poslinkius) integruoti į kompiuterinio paketo MatrixFrame (arba analogiškos programos) atliekamą konstrukcijos analizės procesą.
6. Sukurti KKA ir projektavimo standartų sąsajas.

Tyrimų metodika

Pasitelkiami ekstreminiai energiniai deformuojamo kūno mechanikos principai ir matematinio programavimo teorija. Optimizavimo uždavinių diskretiniai matematiniai modeliai sudaromi pusiausvirųjų baigtinių elementų metodu. Tyrimai atlikti ir skaitinių eksperimentų rezultatai gauti, laikantis mažų poslinkių prielaidos. Tyrimai pagrįsti autoriaus ilgamete UAB Matrix Software Baltic inžinieriaus-programuotojo patirtimi kuriant ir tobulinant komercinę konstrukcijų analizės ir projektavimo programą MatrixFrame.

Darbo mokslinis naujumas ir jo reikšmė

Rengiant disertaciją buvo gauti šie statybos inžinerijos mokslui nauji rezultatai:

1. Atskleistos matematinio programavimo, plačiai paplitusio ekstreminių uždavinių sprendimo metodo, ir ekstreminių energinių principų sąsajų teikiamos naujos galimybės, formuluojant prisitaikomumo teorijos analizės ir optimizavimo uždavinius ir juos skaitiškai sprendžiant.
2. Sudaryti nauji prisitaikančių sistemų tikrinamojo ir projekcinio optimizavimo netiesinių uždavinių matematiniai modeliai su užtikrinančiomis prisitaikomumą ir standumo bei klumpamosios galios sąlygomis-apribojimais.

3. Skaitinė analizė grindžiama I tipo skerspjūvio profiliuotųjų panaudojimu.
4. Realizuota prisitaikančių strypinių konstrukcijų optimizavimo metodika: patobulinti rėmų atsižvelgiant į stiprumo, standumo ir klumpamosios galios (EN1993 ir NEN6771) sąlygas, uždavinių netiesiniai matematiniai modeliai, sprendimo algoritmai, atlikti skaitiniai eksperimentai.
5. Sukurtas optimizavimo metodikos (autorius sukurtos programinės įrangos) integracijos principas į pramoninę programą (MatrixFrame).
6. Pasiūlyta metodika leidžianti dvimačio uždavinio (plokštės) optimizavimo uždavinyje panaudoti Treska ir Mizeso takumo sąlygas, užtikrinančias efektyvesni ir tikslesni sprendinį.

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Sukurtieji nauji prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo metodai ir matematiniai modeliai įvertinantys stiprumo, standumo ir klumpamosios galios sąlygas gali būti naudojami konstrukcijų optimizavimui atsižvelgiant į projektavimo standartus. Sukurta programinė įranga prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždaviniams spręsti.

Darbo rezultatų apibavimas

Disertacijos tema perskaityti 8 pranešimai Lietuvos bei kitų šalių konferencijose. Disertacijos tema paskelbta 12 straipsnių: šeši – leidiniuose įtrauktuose į Thomson ISI sąrašą (Atkočiūnas *et al.* 2007a; Atkočiūnas *et al.* 2007b; Atkočiūnas *et al.* 2008a; Atkočiūnas ir Venskus 2011; Kalanta *et al.* 2009; Venskus *et al.* 2010); vienas konferencijų medžiagoje, referuotoje Thomson ISI duomenų bazėje (Kalanta *et al.* 2007d); vienas – recenzuojamoje užsienio tarptautinės konferencijos medžiagoje (Atkočiūnas ir Venskus 2008b); vienas – recenzuojamame užsienio mokslo leidinyje (Atkočiūnas *et al.* 2007c); vienas – recenzuojamoje Lietuvos tarptautinės konferencijos medžiagoje (Kalanta *et al.* 2007e); du – nerenzuojamoje Lietuvos konferencijos medžiagoje (Venskus ir Atkočiūnas 2005, 2006).

Disertacijoje atliktų tyrimų rezultatai buvo paskelbti šiose mokslinėse konferencijose:

- Tarptautinėje konferencijoje „*Stability and Ductility of Structures*”. Baltic Session of the International Colloquium sacred to the memory of the

Millennium of the name of Lithuania mentioned for the first time in Saxon Quedlinburg annals, 2009 m., Vilniuje;

- Tarptautinėje konferencijoje „Ninth International Conference on Computational Structures Technology”, 2008 m., Atėnuose (Graikija);
- XVI-ajame Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos asociacijos seminare, 2008 m., Vilniuje;
- Tarptautinėje konferencijoje „*Modern building materials, structures and techniques*”, 2007 m., Vilniuje;
- Tarptautinėje konferencijoje „*Strength, durability and stability of materials and structures. SDSMS'04*“, 2007 m., Palangoje;
- XIV Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos asociacijos konferencijoje. 2006 m., Vilniuje;
- Jaunųjų mokslininkų konferencijoje „*Mokslas – Lietuvos ateitis*“ 2006 m., Vilniuje;
- Jaunųjų mokslininkų konferencijoje „*Lietuva be mokslo – Lietuva be ateities*“ 2005 m., Vilniuje.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, penki skyriai ir išvados. Taip pat yra keturi priedai.

Darbo apimtis 94 puslapiai, neskaitant priedų, tekste panaudotos 125 numeruotos formulės, 27 paveikslai ir 7 lentelės. Rašant disertaciją buvo panaudoti 122 literatūros šaltiniai.

Prisitaikomumo teorijos analizė

Daugelyje inžinerinių situacijų statybinės konstrukcijos patiria tokį apkrovų poveikį, kai tiksli apkrovimo istorija nežinoma arba egzistuoja žymūs apkrovos ciklinės prigimties požymiai. Todėl, esant tokiems poveikiams, praktinė svarba metodų, įvertinančių konstrukcijų elgseną, yra akivaizdi. Šiuo požiūriu prisitaikomumo teorijos taikymas tampriosioms plastinėms konstrukcijoms, veikiamoms KKA istorijos, dažnai yra būtinas reikalavimas. Konstrukcijos, veikiamos KKA, gali netekti laikomosios galios dėl mainiojo plastiškumo, priaugiminio suirimo arba dėl staigaus plastinio suirimo. Tačiau bet kokia suirimo požiūriu saugi apkrovimo istorija gali sukelti pradinėse apkrovimo stadijose liekamuosius įtempius, kai, atsiradus pirmosioms netamprioms deformacijoms, toliau konstrukcija dirba kaip visiškai tampri. Pastarasis reiškinys yra prisitaikomumo teorijos tyrimų objektas. Prisitaikomumo teorijoje išskirtinos dvi pagrindinės vystymosi kryptys – tai klasikinių Melano-Bleicho (statinė) ir Koiterio (kinematinė) teoremų teiginių praplėtimas ir apibendrinimas (tai *temperatūros šiluminių poveikių, dinaminių procesų, sustiprėjimo, geometrinio netiesiškumo* ir kt. įvertinimas), bei *liekamųjų deformacijų* (postshakedown) *ribojimo* metodai. Kas liečia metodus, skirtus praktinėms prisitaikomumo problemoms spręsti, pažanga šioje srityje remiasi konstrukcijų diskretizacijos bei matematinio optimizavimo plačiu taikymu.

Daugybė literatūros prisitaikomumo tema verčia daryti kryptingą jos apžvalgą, kuri siejasi su disertacijos tema.

1.1. Pagrindinės prisitaikomumo teoremos

1.1.1. Melano statinė prisitaikomumo teorema

1936 metais Melan (1936) pateikė teoremą skirtą statiskai neišsprendžiamoms konstrukcijoms, kurią pats 1938 metais išplėtė kontinuumo atvejui, pateikdamas būtinąjį prisitaikomumo kriterijų (Melan 1938): *konstrukcija prisitaikys, jeigu kiekviename kūno taške egzistuoja nepriklausantys nuo laiko liekamieji įtempiai σ_r , tokie, kad jų suma su kintamąja („pseudotamprija“) įtempių dalimi σ_e sudaro leistinąjį įtempių būvį σ , esant visoms apkrovų, kintančių duotose ribose, kombinacijoms*. Dabar ši teorema vadinama klasikine statine prisitaikomumo arba Melano teorema.

1.1.2. Koiterio kinematinė prisitaikomumo teorema

1956 metais Koiter (1956, 1960) pateikė klasikine tapusią kinematinę prisitaikomumo teoremą, nusakančią būtinas sąlygas, dėl kurių idealiai tampriai plastinė konstrukcija neprisitaikys: *prisitaikomumas neįmanomas (t. y. sistema plastinio deformavimo metu suirs), jeigu galima rasti kintančias duotosiose ribose išorines apkrovas q ir leistinų plastinių deformacijų greičius $\dot{\epsilon}_p$ tokius, kad*

$$\int_0^T \int_{S_f} q^T \dot{u} dS dt > \int_0^T \int_V \mathcal{F}(\dot{\epsilon}_p) dV. \text{ Čia } \mathcal{F}(\dot{\epsilon}_p) - \text{energijos disipacijos cikle } T \text{ funkcija.}$$

ja. Ciklu čia suprantamas laiko tarpas $0 \div T$, per kurį pasireiškia visi charakteringi plastinio irimo požymiai. Kita vertus, sistema prisitaikys, jeigu dėl kintančios duotosiose ribose apkrovos q ir bet kurių leistinų plastinių deformacijų ciklų $\dot{\epsilon}_p$ galima rasti tokių skaičių $s > 1$, kad būtų tenkinama nelygybė:

$$s \int_0^T \int_{S_f} q^T \dot{u} dS dt \leq \int_0^T \int_V \mathcal{F}(\dot{\epsilon}_p) dV. \text{ Viršutinė skaičiaus } s \text{ riba yra prisitaikomumo}$$

atsargos koeficientas.

1.2. Prisiaikomumo analizė

Prisiaikomumo analizės teorija ir fundamentinė metodologija yra klasikinės mechanikos dalis apie konstrukcijas, veikiamas KKA ir gali būti laikoma praktiškai ir konceptualiai reikšmingu ribinės analizės apibendrinimu. Šiuo požiūriu klasikinė teorija ir pagrindinė jos raida sistemingai pateikti, pavyzdžiui, Königo ir Maierio (1981), Polizzotto (1982), Königo (1982a; 1987), Kaliszky (1989), Kleibero ir Königo (1990), Kleibero ir Wozniako (1991), Mrózo ir Weicherto (1995), Weicherto ir Maierio (2000; 2002), Jiraseko ir Bažanto (2002) apžvalgo-se, knygo-se ir straipsnių rinkiniuose.

Prisiaikomumo analizė, suprantama griežtąja prasme, pagal savo prigimtį, suteikia informaciją apie didžiausią stiprumo atsargą, t. y. kritinę reikšmę, už kurios ribų įvyksta neprisiaikomumas, ir liekamųjų įtempimų pasiskirstymą po prisiaikomumo ar, neprisiaikymo atveju – suirimo kinematinį pobūdį (priauginis ar mainusis). Metodai, kurie leidžia numatyti konstrukcija prisiaikys ar neprisiaikys (priešingu atveju reikia įvertinti stiprumo atsargą) turi didelę praktinę svarbą. Taigi, daugelyje techninių situacijų esant kintamiems poveikiams konstrukcijų ekonomiškumas reikalauja pripažinti plastinių deformacijų egzistavimą. Kitaip tariant, tai neišvengiama. Tačiau siekiant kontroliuoti plastinę konstrukcijų elgseną būtina žinoti plastinių deformacijų bei liekamųjų poslinkių dydžius susikaupusius iki konstrukcija prisiaiko. O klasikinių prisiaikomumo teoremų taikymas tokios informacijos nesuteikia. Iki 1972 metų nebuvo jokių metodų tamprioms plastinėms deformacijoms įvertinti iki prisiaikomumo būvio. Vėliau tokie metodai pateikti (Vitiello 1972; Ponter 1972, 1975; Capurso *et al.* 1978; Dorosz 1978) ir net parodyta, kad iki pasiekiant prisiaikomumo būvį praktinėse situacijose, poslinkiai yra tamprumo ribose, net jei stiprumo atsarga neprisiaikymo požiūriu yra maža.

1.3. Ribojimo metodai

Daug pastangų buvo įdėta siekiant nustatyti prisiaikomumo ribą, kai ribojami atitinkami dydžiai, pavyzdžiui, liekamieji poslinkiai tam tikruose konstrukcijos pjūviuose. Tokie *ribojimo metodai* naudingi, dažnai būtini konstrukcijos saugumui patikrinti. Pirmiausiai buvo pateikti metodai, įtraukiantys apribojimų sąlygas kaip būtinas prisiaikomumo teoremose (Rizzo 1983; Rizzo ir Giambanco 1984). Toks požiūris, grindžiamas ribojimo metodais, įtraukiant ribotą valkšnumą, nesudėtingoms gelžbetoninėms konstrukcijoms ir plieninėms santvaroms buvo pristatytas Polizzotto (1984), Polizzotto ir Rizzo (1987). Tačiau šis sprendimas yra ne toks populiarus lyginant su išankstiniu atskirų ribų numatymu. Ribų teoremų išsivystymą ir jų platų pritaikymą apibendrina Corigliano *Ribų teo-*

remos apytiksliam plastinių deformacijų ir liekamųjų poslinkių nustatymui buvo pasiūlytos – Kaneko ir Maierio (1981), Polizzotto (1982), Kaliszky (1996), Lange-Hansen (1998), Tin-Loi (2000), Weicherto ir Maierio (2002).

Geriausių ribų paieška neabejotinai siejama su optimizavimo uždaviniu. Didžioji dalis tyrimų šioje srityje yra tamprių plastinių konstrukcijų analizės uždaviniai, efektyviai panaudojant iteracines procedūras (Pycko 1997; Giambanco *et al.* 1998 a; Spiliopoulos 1999; Cascario ir Garcea 2002). Daug mažiau išvystytas konstrukcijų optimizavimas prie fiksuotos apkrovos, o darbų apie konstrukcijų optimalų projektavimą prisitaikomumo sąlygomis vis dar yra nedaug ir vykdomi jie pavieniu tyrėjų.

1.4. Optimalus projektavimas prisitaikomumo sąlygomis

Pirmosios studijos apie struktūrų *optimalų projektavimą prisitaikomumo sąlygomis*, minimizuojant rėminių konstrukcijų svorį pagal klasikinius optimalumo kriterijus, buvo Heymano (1958). Heymano iteracinė metodika vėliau buvo pritaikyta kitų autorių (Cohn ir Parimi 1973; König 1975; Borkowski ir Atkočiūnas 1975; Save ir Prager 1985; Nguyen ir Morelle 1990). Bandytas apjungti optimizavimo uždavinyje (minimalaus svorio nustatymo) prisitaikomumą su riboto tamprumo ribojimais ir išspręsti šio uždavinio bendriausius atvejus atliktas Polizzotto (1984). Polizzotto prieaugiminio priartėjimo esmė yra ta, kad kiekvienos iteracijos metu projekto kintamieji lieka pastovūs ir pakoreguojami kiekvieną kartą prieš kitą iteraciją. Pasiūlytąjį modelį, puikiai tinkantį mažiems pavyzdžiams, patobulino Tin-Loi (2000), taikant matematinį programavimą su pramoninio modeliavimo sistema didelio masto optimizavimo uždavinio tiesioginiam sprendimui. Optimizavimo uždavinys suformuluotas, remiantis klasikine apatinės ribos prisitaikomumo teorema papildyta liekamųjų poslinkių apribojimais.

Optimalaus projekto paieškos (dažniausiai minimalaus svorio arba tūrio) problemos tinkamas formulavimas labiausiai priklauso nuo konkretaus apribojimo kriterijaus pasirinkimo, o tai priklauso nuo pasirinkto konstrukcijos ribinio būvio. Jei ribiniu įvedamas tamprusis būvis, tuomet formuluojamas tamprus optimizavimo uždavinys, pavyzdžiui, Cinquini *et al.* (1980); jei pasirenkamas prisitaikymo kriterijus – formuluojamas prisitaikomumo optimalus projektas (Cohn ir Parimi 1973; König 1975; Giambanco *et al.* 1994a, 1994b, 1998b; Giambanco ir Palizzolo 1995); pagaliau, jei taikomas suirimo ribinis būvis, sudaromas standartinis plastinis optimizavimo uždavinys (Rozvany 1976, 1989; Save ir Prager 1985). Kadangi bet kurioje iš trijų aukščiau minimų formuluočių pasirenkamas tik vienas apribojimo kriterijus, tuo užtikrinamas konstrukcijos optimalus projektas, atitinkantis būtent šį kriterijų, tačiau tokiu būdu ignoruojamos visos kitos

galimos ribinės būklės. Taigi, taip suprojektuota konstrukcija gali turėti pakankamą stiprumo atsargą staigaus suirimo atžvilgiu, tačiau negali pademonstruoti tinkamą elgseną kitose inžinerinėse situacijose, pavyzdžiui, eksploatacijos metu. Pastaruoju metu, keletas tyrėjų (Giambanco 2000; Palizzolo 2000) pasiūlė vienu metu įvertinti visus tris kriterijus – tai vadinama daugiakriteriniu optimizavimu. Vėliau, Palizzolo (2004), tęsdamas šiuos tyrimus, tampriai plastinei lenkiamai sijai pateikė keturias skirtingas šios problemos formuluotes, grindžiamas dviem ribų teoremomis. Minimalaus tūrio ir maksimalios apkrovos paieškos uždaviniai sudaryti, vienu metu taikant visus aukščiau minėtus kriterijus.

1.5. Dualumas ir matematinis programavimas

Tiek matematikos, tiek mechanikos požiūriu, *dualumas* (Malvern 1969), kuris jungia apatinės ir viršutinės ribų teoremas, yra labai patraukli prisitaikomumo teorijos savybė. Ši savybė leidžia taikyti vieną iš matematinių optimizavimo teorijų, būtent *matematinio programavimo teoriją*. Todėl mokslinėje literatūroje apie prisitaikomumą kreipinys į dualumą sutinkamas labai dažnai. Maier (1973) pirmasis parodė, kad taikant matematinio programavimo metodą, gaunamas tikslus statinio ir kinematinio priėjimo dualumas. Dualumo studijos prisitaikomume vėliau buvo atliktos De Saxcé (1986), Morelle (1989), Kamenjarzh (Kamenjarzh ir Weichert 1992) ir kitų. Pastarieji, panaudodami iškilos analizės priėjimą, iš statinės Melano teoremos nustatė kinematinį atsargos koeficientą. Dualumas tuokart buvo apribotas plonasienių konstrukcijų sferinio takumo paviršiaus atvejais. Dualumo teoremos apibendrinimas platesniam taikymui, siekiant apimti platesnę takumo paviršių klasę, pavyzdžiui, tokius, kaip cilindrinis takumo paviršius; o taip pat ir skirtingus tempimo ir gniuždymo takumo įtempimus, pateiktas Kamenjarzh ir Merzljakov (1994a, 1994b) darbe. Nagrinėjant prisitaikomumo analizę, Polizzotto (1993b) parodė tai, jog egzistuoja statinės ir kinematinės formuluočių tiesinis (tiesioginis) dualumas tuo atveju, kai kintamų apkrovų rinkinys yra briaunainis. Dualumo teorijos išplėtimas iškilai nedaugiakampei apkrovos sričiai yra Silveira (Zouain ir Silveira 1999) darbe. Čia, priaugiminių suirimui panaudojant kinematinę formuluotę gaunama duali statinė formuluotė. Tačiau nors apatinės ir viršutinės prisitaikomumo teoremų dualumas plačiai taikomas optimizavime, diskretinių formų dualumas prisitaikomumo analizėje, vis dar retas reiškinys. Tarp šių tyrimų, apatinės ir viršutinės prisitaikomumo ribų dualumas, taikant kinematiškai leistinus baigtinius elementus ir Mizeso takumo kriterijų (Vu *et al.* 2004a, 2004b). Taip sudarytas efektyvus prisitaikomumo analizės algoritmas. Kiti baigtinių elementų ir ekstreminių principų (Lanczos 1970) taikymo prisitaikomume pavyzdžiai – Zouain ir Silveira (1999, 2000), Zouain *et al.* (2002), Polizzotto (2003), Bower (2010).

Klasikiniai kvazistatinio prisitaikomumo problemų sprendimo metodai pradžioje rėmėsi tiesiniu arba netiesiniu matematiniu programavimu (Maier 1969; Maier *et al.* 1972; Corradi ir Zavelani 1974; Čyras 1983; Karadeniz ir Ponter 1984), vėliau buvo išplėsti įvairiems baigtinių elementų tipams (Belytschko 1972; Nguyen ir Morelle 1981; Alwis ir Grundy 1985; Morelle 1986; Ponter *et al.* 1990). Kadangi praktiniams inžineriniams konstrukcijų skaičiavimams labiau tinka diskretiniai matematiniai modeliai, dauguma realių konstrukcijų skaičiuojama baigtinių elementų metodu (Bathe 2006, Barauskas *et al.* 2004, Smith ir Griffiths 2004). Tuo būdu uždavinys suvedamas į lygčių sprendimą, tačiau šios lygtis yra algebrinės, o ne diferencialinės. Todėl daug šiuolaikinių programinių paketų priedų, skirtų konstrukcijų optimizavimui plačiai naudoja nuolat augančių kompiuterinių technologijų galingumą, derinant konstrukcijų diskretizaciją su tiesioginio sprendimo metodais. Pavyzdžiui, netiesinio programavimo metodo realizacija komerciniame baigtinių elementų programų pakete, sprendžiant prisitaikomumo problemas, aprašoma Ponter (Ponter *et al.* 2000; Ponter ir Engelhardt 2000) darbuose; prisitaikymo apkrovos apatinės ribos skaičiavimas, taikant baigtinių elementų programinį paketą (Muscat *et al.* 2003).

Matematinio programavimo teorija nuo pat pirmųjų jos taikymų prisitaikomumo tyrimuose yra ne tik efektyvus įrankis skaitiniams prisitaikomumo uždaviniams spręsti, bet ir matematinė struktūra, sudarant ir aprašant šiuos uždavinius (Maier 1969, 1970; Corradi ir Zavelani 1974; Atkočiūnas 1994, 1999; Čyras 1989; Čyras *et al.* 2004; Kalanta 2007;). Tarp sunkumų praktiniam inžineriniam matematinio programavimo taikymui prisitaikומe reikėtų paminėti prisitaikančios konstrukcijos lokalinių liekamųjų poslinkių ir plastinių deformacijų įvertinimą (Atkočiūnas *et al.* 1981). Šios problemos sprendimą optimizuojant prisitaikančias strypines sistemas demonstruoja Ferris (Ferris ir Tin-Loi 1997), Kaliszky (Kaliszky ir Logo 1997, 2002) darbai. Pažymėtina matematiniame modelyje taikomo takumo kriterijaus svarba. Ankstesniuose prisitaikomumo tyrimuose buvo vystomas tiesinis programavimas, taikant Treska kriterijų arba linearizuotą takumo kriterijų. Taikant Mizeso kriterijų prisitaikomumo uždavinys tampa netiesinio programavimo problema, kurios sprendimas esant sudėtingai konstrukcijai ar apkrovimui praktiniams inžineriniams tikslams vis dar yra iššūkis.

1.6. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas

Atlikę prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo metodų apžvalgą galime padaryti tokias išvadas:

1. Statybos inžinerijoje realūs konstrukciją veikiantys poveikiai yra cikliški, todėl prisitaikomumo teorijos taikymas konstrukcijų saugumo įvertinime yra svarbus, dažnai būtinas, reikalavimas.
2. Optimizavimo uždavinių matematiniuose modeliuose įvertinama poslinkių liekamoji dalis: dažniausiai taikoma žinoma Koiterio nelygybė. Būtina pasitelkti liekamųjų poslinkių influentinę matricą.
3. Pramoninėje programinėje įrangoje ciklinė apkrova įvertinama pasitelkus apkrovimo istorijas. Deja tai gali neužtikrinti konstrukcijos prisitaikomumo pilnutinės analizės.
4. Akivaizdu, kad egzistuojančioms metodikoms trūksta sąsajų tarp prisitaikančių konstrukcijų teorija pagrįstų optimizavimo metodų ir standartaais grįsto realaus projektavimo.
5. Išryškėja nesugebėjimas įvertinti apkrovos derinius plastiniame skaičiavime.
6. Prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo metodika ir sintezė su realiu projektavimu nepakankamai išvystyta.

Taigi norint prisitaikomumo teoriją taikyti statybos inžinerijos praktinių uždavinių sprendimui reikia išspręsti šiuos uždavinius (etapus):

1. Sukurti prisitaikančių konstrukcijų tikrinamojo ir projekcinio optimizavimo uždavinių patikslintus matematinius modelius, į standumo apribojimus įjungiant suminius (tamprius ir liekamuosius) poslinkius.
2. Skaitinėje analizėje atsisakyti skerspjuvių idealizacijos, įvesti profiliuotųjų realius skerspjuvio parametrus.
3. Sukurti programinę įrangą prisitaikančių konstrukcijų analizei ir optimizavimui realizuojančią patikslintus matematinius modelius.
4. Sukurti metodiką leidžiančią autoriaus programinės įrangos apskaičiuotus plastinio būvio kintamuosius (liekamąsias įrašas ir liekamuosius poslinkius) integruoti į kompiuterinio paketo MatrixFrame (arba analogiškos programos) atliekamą konstrukcijos analizės procesą.
5. Sukurti KKA ir projektavimo standartų sąsajas.
6. Atlikti skaičiavimus iliustruojančius prisitaikančių strypinių konstrukcijų optimizavimą.

Patobulinti prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo modeliai

Praktiniuose konkrečių konstrukcijų skaičiavimuose naudojami konstrukcijų diskretiniai modeliai, kurie sudaromi laikantis tam tikrų geometrinių ir fizikinių skaičiavimo prielaidų. Būtent diskretizacijai, bei projektiniam ir patikrinamajam prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematinių modelių sudarymui ir yra skirtas šis skyrius. Prisitaikančių konstrukcijų KKA apibrėžiančios jėgos, tenkinančios sistemos prisitaikomumo sąlygas, lėtai (kvazistatiškai) kinta laike t . Paprastai žinomos tik viršutinės ir apatinės jėgų kitimo ribos. Visos galimos apkrovimo programos laikomos vienodai tikėtinomis (deterministinis uždavinių formulavimas). Sistemos deformacijos mažos, t. y. geometrinės lygtys tiesinės, pusiausvyros lygčių koeficientų matrica sudaroma jos būviui. Taip pat laikomasi mažų poslinkių prielaidos. Konstrukcijos medžiaga – idealai tampriai plastiška, cikliška stabili (deformavimo diagrama nepriklauso nuo arovimo–nukrovimo ciklų skaičiaus).

Skyriaus tematika paskelbti du autoriaus straipsniai (Atkočiūnas *et al.* 2008a, Kalanta *et al.* 2009).

2.1. Diskretinės sistemos įrašos ir deformacijos

Prisitaikiusių konstrukcijų optimizavimo problemos sprendžiamos, kai apkrovos kitimo ribos $\mathbf{F}_{inf}$, $\mathbf{F}_{sup}$ yra tokios, kad konstrukcija, per pradinis apkrovos ciklus patyrusi plastines deformacijas $\boldsymbol{\Theta}_p$, vėliau prisitaiko prie pateiktos apkrovos ir toliau dirba tamptariai (Konig ir Maier 1981; Atkočiūnas ir Čižas 2009; Atkočiūnas ir Karkauskas 2010). Dėl plastinių deformacijų $\boldsymbol{\Theta}_p$ įtakos prisitaikiusioje sistemoje atsiranda liekamųjų įrašų $\mathbf{S}_r$, kurios ir užtikrina, kad kintant apkrovai, naujų plastinių deformacijų nebesusidarys (tampriosios konstrukcijos skaičiavimo kintamieji disertacijoje indeksuojami raide e , liekamosios įrašos, deformacijos ir poslinkiai – indeksu r). Todėl prisitaikiusių konstrukcijų analizėje patogu išskirti liekamąsias įrašas $\mathbf{S}_r$ (jos yra saupusiausvyros, t. y. tenkinančios pusiausvyros lygtis, kai $\mathbf{F} = \mathbf{0}$), poslinkius $\mathbf{u}_r$ ir deformacijas $\boldsymbol{\Theta}_r$. Pusiausvyros ir geometrinės lygtys užrašomos taip:

$$\mathbf{A}\mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \boldsymbol{\Theta}_r, \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_r = \mathbf{D}\mathbf{S}_r + \boldsymbol{\Theta}_p. \quad (2.3)$$

Čia (2.1) ir (2.2) yra pusiausvyros ir geometrinės lygtys atitinkamai. $\mathbf{S}_r = \{\mathbf{S}_{r1}, \mathbf{S}_{r2}, \dots, \mathbf{S}_{rn}\}$ – liekamųjų įrašų, kurių bendras skaičius yra n , vektorius, $\mathbf{D}$ – $(n \times n)$ eilės kvazidiagonalioji atskirų elementų pasiduodamumų matrica, $\boldsymbol{\Theta}_p$ – plastinių deformacijų vektorius. Vektorių $\mathbf{u}_r$, $\boldsymbol{\Theta}_p$ struktūra yra tokia: $\mathbf{u}_r = \{\mathbf{u}_{r1}, \mathbf{u}_{r2}, \dots, \mathbf{u}_{mr}\}$, $\boldsymbol{\Theta}_p = \{\boldsymbol{\Theta}_{p1}, \boldsymbol{\Theta}_{p2}, \dots, \boldsymbol{\Theta}_{pn}\}$. Suminiai dydžiai žymimi:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_r + \mathbf{S}_e, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_e, \quad \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_r + \boldsymbol{\Theta}_e. \quad (2.4)$$

Diskretinės konstrukcijos įtempių būvis (Atkočiūnas 1999) išreiškiamas įrašų vektoriumi $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_\zeta\}$, $\zeta = s \times v$. Čia s – diskretinį modelį sudarančių baigtinių elementų skaičius ($k=1, 2, \dots, s$, $k \in K$), kur v – kiekvieno elemento mazgų (skaičiuojamųjų pjūvių) skaičius ($l=1, 2, \dots, v$, $l \in \mathcal{L}$). Taigi dydis ζ yra bendras konstrukcijos diskretinio modelio mazgų skaičius ($i=1, 2, \dots, \zeta$, $i \in I$). Vektoriaus $\mathbf{S}$ komponentais gali būti lenkimo momentai M , skersinės Q , ašinės jėgos N . Pagrindinė disertacijos nagrinėjama konstrukcija yra rėmai, todėl $\mathbf{S}$ vektoriuje bus įvertinami lenkimo momentai M ir ašinės jėgos N (arba tik M). Su įrašų vektoriumi $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_\zeta\} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ yra sude-

rintas deformacijų vektorius $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_\zeta\} = \{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_n\}$. Suderinamumas reiškia, kad kiekvieno vektoriaus $\boldsymbol{S}$ ir $\boldsymbol{\theta}$ komponentų skaičius yra vienodas ir lygus n ($n = s \times v \times n_v = \zeta \times n_v$, čia n_v yra įrašų skaičius mazge (pjūvyje)). Disertacijoje nagrinėjamų rėmų atveju laikoma, kad pjūvyje plastines deformacijas lemia ir M , ir N , todėl įrašų rodiklis $n_v = 2$.

Kita dualių kintamųjų pora yra apkrovos $\boldsymbol{F}$ ir poslinkiai $\boldsymbol{u}$. Šių vektorių komponentų skaičius yra lygus konstrukcijos diskretinio modelio laisvės laipsniui m . Pusiausvyros lygčių koeficientų matricos $\boldsymbol{A}$ eilučių ir stulpelių skaičius lygus diskretinio modelio globalinių poslinkių bei įrašų skaičiui m ir n atitinkamai. Tada visos diskretinės sistemos pusiausvyros lygtys užrašomos

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F} \text{ arba } \sum_k \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{S}_k = \boldsymbol{F}. \quad (2.5)$$

Čia $\boldsymbol{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, $\boldsymbol{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ – įrašų ir apkrovų vektoriai, o $\boldsymbol{A}_k$ – k – tojo baigtinio elemento pusiausvyros lygčių matrica. Tuomet geometrinės lygtys užrašomos taip:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\theta}. \quad (2.6)$$

Čia $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_n\}$, $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ – deformacijų ir poslinkių vektoriai.

Disertacijoje laikoma, kad konstrukcijos pjūvis gali būti arba tampraus, arba plastinio būvio (darbe naudojami I tipo skerspjuviai, kurių forma artima idealiam skerspjuviui). Takumo sąlygos nusako kokio tipo yra konstrukcijos pjūvis. Pritaikius skaliarinę ir išskyląją takumo funkciją f , takumo sąlygos užrašomos kiekvienam diskretinio modelio mazgo taškui i ($i=1, 2, \dots, \zeta = s \times v$):

$$f_i(\boldsymbol{S}_i) \leq S_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots, \zeta, \quad i \in I. \quad (2.7)$$

Čia S_{0i} yra pjūvio ribinė įraža (pvz., lenkiamai sijai tai būtų ribinis momentas M_0). Dažnai netiesinė sąlyga (2.7) užrašoma tokiu pavidalu:

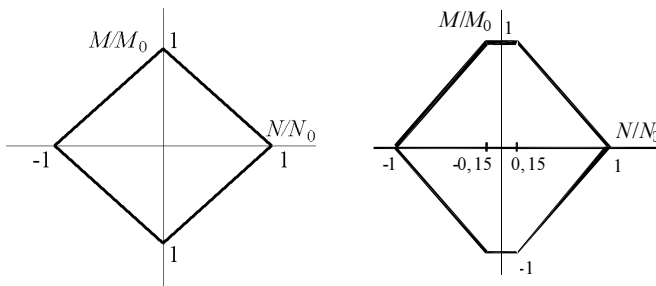
$$\varphi_i = S_{0i} - f_i(\boldsymbol{S}_i) \geq 0. \quad (2.8)$$

Kai rėmo diskretinio modelio mazge veikia lenkimo momentas M ir ašinė jėga N , tuomet rėmo stiprumo charakteristikos yra ribinis lenkimo momentas $M_0 = \sigma_y W_{pl}$ ir ribinė ašinė jėga $N_0 = \sigma_y A$; čia W_{pl} – plastinis skerspjuvio atsparumo momentas, A – skerspjuvio plotas. Nors elemento skerspjuvio forma gali būti įvairi, disertacijoje, kaip jau buvo minėta, KKA atveju orientuojamasi į I tipo skerspjuvį, kurio skerspjuvio formos koeficientas $\mu = 1, 15 \dots 1, 17$. Tai

leidžia tiksliau priartėti prie idealiai tamprios plastinės elgsenos (Prantlio diagramos). Sąlyga (2.8) rėmo uždavinių matematiniuose modeliuose dažnai taikoma kaip tiesinė takumo (stiprumo) sąlyga:

$$|M| + c|N| \leq M_0, \quad c = \frac{M_0}{N_0}. \quad (2.9)$$

Taigi šiuo atveju $S_0 = M_0$. Disertacijoje sąlyga (2.9) užrašoma keturių arba šešių nelygybių sistemomis, grafiškai jos pavaizduotos 2.1 pav.



2.1 pav. Tiesinės takumo sąlygos

Fig. 2.1. Linear yield conditions

Visam diskretiniam konstrukcijos modeliui takumo sąlygos (2.9) užrašomos taip:

$$f(S) \leq S_0, \quad (2.11)$$

o jų reikšmių vektorius φ yra

$$\varphi = S_0 - f(S). \quad (2.12)$$

2.2. Tampriųjų įrašų hodografas

Kartotinė-kintamoji apkrova $F(t)$ išreiškiama ne konkrečia apkrovimo istorija, o tik viršutinėmis ir apatinėmis savo kitimo ribomis $F_{sup} = \{F_{1,sup}, F_{2,sup}, \dots, F_{m,sup}\}$, $F_{inf} = \{F_{1,inf}, F_{2,inf}, \dots, F_{m,inf}\}$, kurios nepriklauso nuo laiko t ($F_{inf} \leq F(t) \leq F_{sup}$). Taigi apkrovos vektoriaus F komponentų skaičius yra lygus konstrukcijos diskretinio modelio laisvės laipsniui m , t. y. jų

yra tiek, kiek yra pusiausvyros lygčių $AS = F$. Tamprumo sprendinio įrašų $S_e(t)$ kitimo sritis, atsižvelgiant į galimas apkrovų F_{sup} , F_{inf} kitimo ribų kombinacijas j (jų yra $p = 2^m$, $j = 1, 2, \dots, p$, $j \in J$), yra ribojama iškilo ir simetriško savo centro atžvilgiu hodografo. Tampraus skaičiavimo vektoriai S_{ej} yra tiesinės apkrovos kitimo ribų F_{inf} , F_{sup} funkcijos ir išreiškia visas hodografo

$$S_e(t) = \alpha F(t), \quad (2.13)$$

$$\alpha = D^{-1} A^T (A D^{-1} A^T)^{-1}, \quad (2.14)$$

viršūnes $j = 1, 2, \dots, p$, $j \in J$. Čia α – tamprųjų įrašų influentinė matrica.

2.3. Kartotinės-kintamosios apkrovos takumo sąlygos

Pritaikius tampraus konstrukcijos skaičiavimo įrašų vektorius S_{ej} , $j \in J$, takumo sąlygos (2.12) užrašomos:

$$\begin{aligned} \varphi_{kl,j} = S_{0k} - f_{kl,j}(S_{rkl} + S_{ekl,j}) &\geq 0, \\ k \in K, l \in \mathcal{L}, j \in J \end{aligned} \quad (2.15)$$

Visos konstrukcijos takumo sąlygos $f(S) \leq S_0$ užrašomos sekančiai:

$$f_j(S_r + S_{ej}) \leq S_0, \quad j \in J. \quad (2.16)$$

Panaudojus takumo sąlygos (2.16) išvengiama apkrovimo istorijos nagrinėjimas (tam ir naudojamos tampraus skaičiavimo įrašos S_{ej}). Vienkartės apkrovos atveju skaičiuojamajam pjūviui rašoma „viena“ takumo sąlyga, kadangi yra viena apkrovos viršūnė $j=1$, o KKA atveju pjūviui rašomų takumo sąlygų skaičių nulemia apkrovų kitimo ribų vektorių F_{sup} , F_{inf} komponentų galimų tarpusavio kombinacijų skaičius $p = 2^m$ ($j = 1, 2, \dots, p$, $j \in J$). Statiškai leistinos liekamosios įrašos S_r tenkina pusiausvyros lygtis (2.12) bei takumo sąlygas (2.15) arba (2.16).

2.4. Prisiaikiosios sistemos geometrinės lygtys

Prisiaikiosios sistemos geometrinės lygtys, gautos pagal (2.2), (2.3) priklauso:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{D} \mathbf{S}_r + \boldsymbol{\theta}_p, \quad (2.17)$$

čia $\boldsymbol{\theta}_p = (\boldsymbol{\theta}_{pkl})^T$ – plastinių deformacijų vektorius. Vektoriaus $\boldsymbol{\theta}_p$ komponentai k -tojo baigtinio elemento l -tajam pjūviui yra apskaičiuojami pagal formulę:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{pkl} &= \sum_j \left[\nabla^T f_{kl,j} (\mathbf{S}_{rkl} + \mathbf{S}_{ekl,j}) \right] \lambda_{kl,j}, \\ \lambda_{kl,j} \left[S_{0k} - f_{kl,j} (\mathbf{S}_{rkl} + \mathbf{S}_{ekl,j}) \right] &= 0, \quad \lambda_{kl,j} \geq 0; \\ k &\in K, \quad l \in \mathcal{L}, \quad j \in J. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Čia

$$\left[\nabla^T f_{kl,j} (\mathbf{S}_{rkl} + \mathbf{S}_{ekl,j}) \right] = \left[\frac{\partial f_{kl,j} (\mathbf{S}_{rkl} + \mathbf{S}_{ekl,j})}{\partial \mathbf{S}_{rkl}} \right] \quad (2.19)$$

– takumo sąlygų (2.15) gradientų matrica, λ_j – plastinių daugiklių vektoriai, $j \in J$. Lygybės

$$\lambda_{kl,j} \left[S_{0k} - f_{kl,j} (\mathbf{S}_{rkl} + \mathbf{S}_{ekl,j}) \right] = 0, \quad (2.20)$$

kai

$$\begin{aligned} S_{0k} - f_{kl,j} (\mathbf{S}_{rkl} + \mathbf{S}_{ekl,j}) &\geq 0, \quad \lambda_{kl,j} \geq 0; \\ k &\in K, \quad l \in \mathcal{L}, \quad j \in J \end{aligned} \quad (2.21)$$

vadinamos matematinio programavimo griežtumo sąlyga. Kinematiškai galimi liekamieji poslinkiai $\mathbf{u}_r$ yra tie, kurie tenkina geometrines lygtis (2.17).

2.5. Projektinio uždavinio matematinis modelis

Konstrukcijos parametų optimizavimo uždavinys formuluojamas taip: *esant pateiktoms apkrovos kitimo riboms $\mathbf{F}_{inf}$, $\mathbf{F}_{sup}$, rasti ribinių įrašų vektorių $\mathbf{S}_0$, tenkinantį optimalumo kriterijų $\min \psi(\mathbf{S}_0)$ ir konstrukcijos prisitaikomumo, konstrukcines bei standumo apribojamąsias sąlygas.*

Tiesinių takumo sąlygų atveju prisitaikančios holonominės elgsenos konstrukcijos projektinio uždavinio matematinis modelis, kai neatsižvelgiama į konstrukcijos skerspjūvių nusikrovimą, yra toks:

rasti

$$\min \psi(\mathbf{S}_0), \quad (2.22)$$

kai

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{G} \mathbf{S}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{G} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad (2.23)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j = 0, \quad (2.24)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \sum_j \boldsymbol{\lambda}_j, \quad j \in J, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{S}_{\min} \leq \mathbf{S}_0 \leq \mathbf{S}_{\max}; \quad (2.26)$$

$$\mathbf{u}_{r,\min} \leq \mathbf{H} \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{u}_{r,\max}. \quad (2.27)$$

Tikslo funkcijos (2.22) skaliarinei funkcijai ψ galima suteikti konkrečią ekonominę interpretaciją. Paprasčiausias ir praktiškai įdomus atvejis yra minimalaus svorio konstrukcijos uždavinys. Idealios skerspjūvio formos ir homogeninės takumo sąlygos atveju minimalus konstrukcijos svoris koreliuoja su tiesine tikslo funkcija $\min \mathbf{L}^T \mathbf{S}_0$. Čia $\mathbf{L}$ yra optimalumo kriterijaus (2.22) svorio koeficientų vektorius. Minimalaus svorio konstrukcijos projektavimo atveju visos medžiagos savybės pateiktos, gali kisti tik elemento ar pjūvio matmenys. Taigi tampriosios konstrukcijos įrašų vektorius $\mathbf{S}_e$ kinta, sprendžiant uždavinį (2.22)–(2.27) jis turėtų būti perskaičiuojamas pagal naują skaičiuojamojo pjūvio geometriją. Uždavinyje (2.22)–(2.27) nežinomieji yra ribinių įrašų vektorius $\mathbf{S}_0$ ir plastinių daugiklių vektorius $\boldsymbol{\lambda}^*$. $\mathbf{G} = \overline{\mathbf{G}} \boldsymbol{\Phi}^T$ ir $\mathbf{H} = \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Phi}^T$ yra influentinės liekamųjų įrašų ir poslinkių matricos. Apribojimai (2.23) nustato statiskai leistinų liekamųjų įrašų vektorių $\mathbf{S}_r$ ir kartu užtikrina tampriosios plastinės sistemos prisitaikymą prie pateiktos KKA $\mathbf{F}_{\inf} \leq \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{F}_{\sup}$ (Melano ir Bleicho teorema). Sąlygos (2.23) kartu su matematinio programavimo griežtumo sąlygomis (2.24) užtikrina, kad bus tenkinamas papildomos deformavimo energijos minimumo principas $\min \mathcal{F}(\mathbf{S}_r) = \min \frac{1}{2} \mathbf{S}_r^T \mathbf{D} \mathbf{S}_r$. Tik tokiu atveju vektoriaus $\boldsymbol{\lambda}^*$ komponentai įgauna plastinių daugiklių prasmę ir tampa įmanoma taikyti formu-

les $\mathbf{S}_r = \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda}^*$, $\mathbf{u}_r = \mathbf{H} \boldsymbol{\lambda}^*$. Būtina pabrėžti, kad konstrukcijos prisitaikomumo būvį užtikrina ne papildomos energijos $\mathcal{F}'(\mathbf{S}_r^*) = \frac{1}{2} \mathbf{S}_r^{*T} \mathbf{D} \mathbf{S}_r^*$ minimali reikšmė, o tik faktas, kad egzistuoja bet koks statiškai leistinas liekamųjų įrašų vektorius $\mathbf{S}_r$. Šis teiginys yra tiesioginė klasikinės Melano ir Bleicho teoremos išvada, išplėtota konstrukcijai. Konstrukcinių apribojimų sąlyga (2.26) nusako ribinių įrašų kitimas sritį per vektorius $\mathbf{S}_{min}$ ir $\mathbf{S}_{max}$. Standumo sąlyga (2.27) naudoja ma apriboti liekamiesiems poslinkiams dydžiais per $\mathbf{u}_{r,min}$ ir $\mathbf{u}_{r,max}$. Jeigu standumo sąlygos (2.27) apskritai būtų ignoruojamos, uždavinio (2.22)–(2.26) sprendimo rezultatas atitiktų konstrukcijos būvį, labai artimą ciklinei plastiškajai suirčiai (bet ne patį ciklinės plastiškosios suirties momentą!).

Nesudėtinga įvertinti ir apribojimų (2.27) tampraus skaičiavimo poslinkius, panaudojant vektorius $\mathbf{u}_e$ t. y.

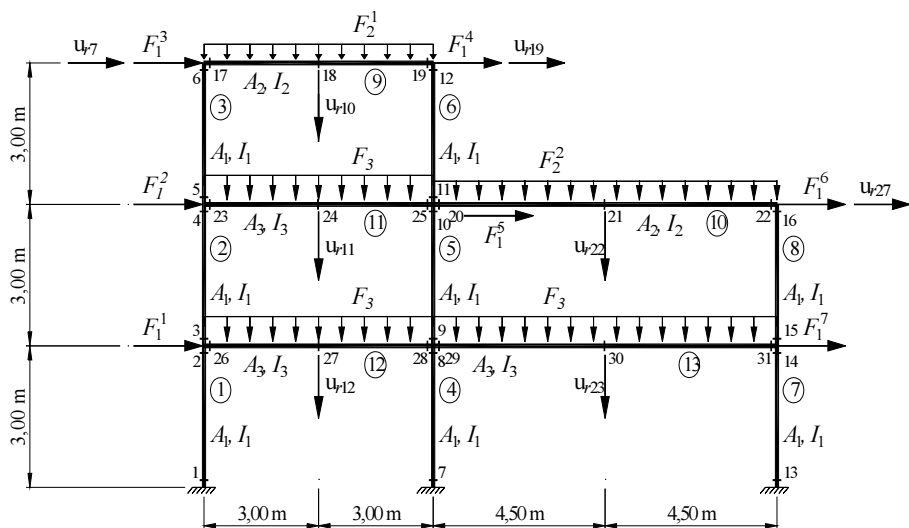
$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{H} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u}_e \leq \mathbf{u}_{max}, \quad (2.28)$$

čia vektoriai $\mathbf{u}_{min}$ ir $\mathbf{u}_{max}$ nusako jau nebe liekamųjų poslinkių $\mathbf{u}_r = \mathbf{H} \boldsymbol{\lambda}$, bet suminių poslinkių $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_e$ apribojimus. Pažymėtina, jog tamprūs poslinkiai skaičiuojami pagal formulę $\mathbf{u}_e = \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}(t)$, kur $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1}$ – tamprųjų poslinkių influentinė matrica.

2.6. Projektinio uždavinio pavyzdys

Trijų aukštų rėmo (2.2 pav.) tūrio minimizacija yra vykdoma pagal matematinį modelį (2.22)–(2.27). Optimizavimo tikslas yra rasti minimalų prisitaikiusio rėmo tūri (2.2 pav.) kai diskretinio modelio įrašų vektorius yra $\mathbf{S} = (\mathbf{M}, \mathbf{N})^T = (M_1, M_2, M_3, \dots, M_{31}, N_1, N_2, \dots, N_{13})^T = (\mathbf{S}_i)^T$, $i=1, 2, \dots, n=44$, kuriame yra įverti ir lenkimo momentai M bei ašinės jėgos N . Uždavinio nežinomieji yra kolonų ir sijų skerspjūvio plotai A_k , $k \in K$ ir plastinių daugiklių vektoriai $\boldsymbol{\lambda}_j$, $j=1, 2, \dots, p$.

Rėmas (2.2 pav.) yra diskretizuojamas pusiausvyraisiais ir mišriaisiais baigtiniais elementais (Kalanta 2007).



2.2 pav. Rėmo diskretinis modelis

Fig 2.2. Discretized frame

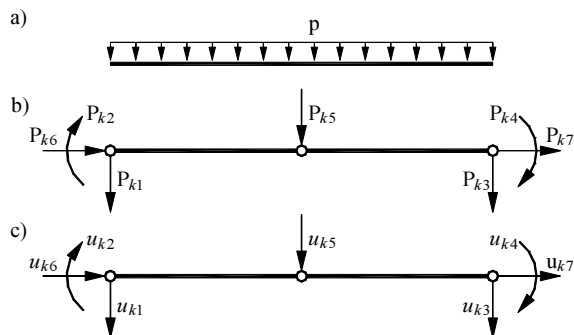
Pusiausvyrieji baigtiniai elementai su šešiais laisvės laipsniais yra naudojami lenkiamoms ir gniuždomoms kolonom modeliuoti, o mišrieji elementai su septyniais laisvės laipsniais (2.3 pav.), kurių vieną laisvės laipsnį atitinka vidurinio pjūvio įlinkis, yra naudojami lenkiamoms ir tolygiai išskirstytu krūviu apkrautoms sijoms modeliuoti. Pastarasis baigtinis elementas tiksliai modeliuoja sijų įtempimų ir deformacijų būvį ir įgalina tiesiogiai apskaičiuoti sijų vidurio poslinkius $u_{r10}, u_{r11}, u_{r12}, u_{r22}, u_{r23}$.

Rėmas yra apkrautas trimis nesusietomis apkrovomis ($p = 2^3 = 8$): horizontaliomis koncentruotomis jėgomis $F_1 = [F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5, F_1^6, F_1^7]$ veikiančiomis rėmo mazguose ir vertikalėmis tiesiogiai išskirstytomis jėgomis $F_2 = [F_2^1, F_2^2]$ veikiančiomis ant stogo sijų, bei $F_3 = [F_3]$ veikiančiomis ant grindų sijų, atitinkamai. Apkrovos kitimo ribos yra užrašomos nelygybėmis: $F_{1,inf} \leq F_1 \leq F_{1,sup}$, $F_{2,inf} \leq F_2 \leq F_{2,sup}$ ir $F_{3,inf} \leq F_3 \leq F_{3,sup}$, kur $F_{1,inf} = \{-5,16, -6,06, -3,6, -7,8, -6,6, -6,0 -10,2\}$ kN, $F_{1,sup} = \{10,2, 12,6, 7,8, 3,6, 3,36, 2,7, 5,16\}$ kN, $F_{2,inf} = \{0, 0\}$, $F_{2,sup} = \{2,52, 5,22\}$ kN/m, $F_{3,inf} = \{0\}$ ir $F_{3,sup} = \{30\}$ kN/m, kurias atitinka $p = 8$ apkrovimo kombinacijos: $F_{1,sup} + F_{2,sup} + F_{3,sup}$; $F_{1,sup} + F_{2,sup} + F_{3,inf}$; $F_{1,sup} + F_{2,inf} + F_{3,inf}$;

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_{1,sup} + \mathbf{F}_{2,inf} + \mathbf{F}_{3,sup}; & \mathbf{F}_{1,inf} + \mathbf{F}_{2,sup} + \mathbf{F}_{3,sup}; & \mathbf{F}_{1,inf} + \mathbf{F}_{2,sup} + \mathbf{F}_{3,inf}; \\ & \mathbf{F}_{1,inf} + \mathbf{F}_{2,inf} + \mathbf{F}_{3,inf}; & \mathbf{F}_{1,inf} + \mathbf{F}_{2,inf} + \mathbf{F}_{3,sup}. \end{aligned}$$

Rėmas pagamintas iš plieno, kurio tamprumo modulis $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ ir takumo riba $\sigma_y = 23,5 \text{ kN/cm}^2$. Rėmo kolonų ir stogo bei grindų sijų skerspjūviai parodyti 2.2 paveiksle. Skerspjūvių parametrai b ir h' išlieka nepakitę visos optimizavimo metu, o keičiasi tik lentynų storiai t_f . Pradiniai lentynų storiai rėmo kolonoms yra $t_{f,col}^0 = 12 \text{ mm}$, stogo sijoms $t_{f,roof beam}^0 = 8 \text{ mm}$ ir grindų sijoms $t_{f,floor beam}^0 = 8 \text{ mm}$. Pradiniai kolonų, stogo ir grindų sijų skerspjūvių plotai yra $A_{col}^0 = A_1^0 = A_2^0 = A_3^0 = A_4^0 = A_5^0 = A_6^0 = A_7^0 = A_8^0 = 57,6 \text{ cm}^2$, $A_{roof beam}^0 = A_9^0 = A_{10}^0 = 14,4 \text{ cm}^2$ ir $A_{floor beam}^0 = A_{11}^0 = A_{12}^0 = A_{13}^0 = 57 \text{ cm}^2$, atitinkamai.

Pradinis rėmo tūris $V^0 = 279540 \text{ cm}^3$. Skerspjūvio ribinės įrašos yra apskaičiuojamos pagal formules: $M_0 = \sigma_y \cdot b \cdot t \cdot h' = \sigma_y \cdot A \cdot \frac{h'}{2}$, $N_0 = \sigma_y \cdot 2b \cdot t = \sigma_y \cdot A$.

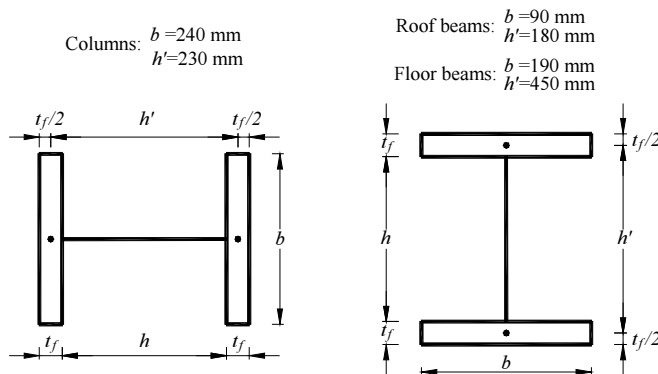


2.3 pav. Baigtinis elementas apkrautas tolygiai išskirstyta apkrova su vidurinio mazgo poslinkiu: a) išorinė apkrova; b) apibendrintos jėgos c) mazginiai poslinkiai

Fig. 2.3. Finite element subjected by distributed load with linear displacements of central node: a) external load; b) generalised forces; c) nodal displacements

Pradinės kolonų ribinės įrašos yra $M_{0,col}^0 = 155,66 \text{ kNm}$ ir $N_{0,col}^0 = 1353,6 \text{ kN}$, stogo ir grindų sijų atitinkamai $M_{0,roof beam}^0 = 30,456 \text{ kNm}$,

$N_{0, roof beam}^0 = 338,4 \text{ kN}$ ir $M_{0, floor beam}^0 = 301,388 \text{ kNm}$ bei
 $N_{0, floor beam}^0 = 1339,5 \text{ kN}$; čia $c_{col} = 0,115$, $c_{floor beam} = 0,09$, $c_{roof beam} = 0,225$.



2.4 pav. Skerspjūviai

Fig. 2.4. Geometry of cross-sections

Kai liekamųjų poslinkių apribojimų (2.27) nėra, gauti sekantys rezultatai: minimalus tūris $V_{min} = 156724 \text{ cm}^3$; liekamieji sijų poslinkiai $u_{r10} = 0,088 \text{ mm}$, $u_{r11} = 0,36 \text{ mm}$, $u_{r12} = 0,77 \text{ mm}$, $u_{r22} = 51,46 \text{ mm}$, $u_{r23} = 12,62 \text{ mm}$; plastinės deformacijos atsirado pjūviuose 7, 8, 14, 15, 20, 22, ir 29 (2.2 pav.). Buvo išnagrinėti dar keturi uždavinio atvejai kai yra nustatyti liekamųjų poslinkių u_{r22}, u_{r23} apribojimai (2.2 pav.):

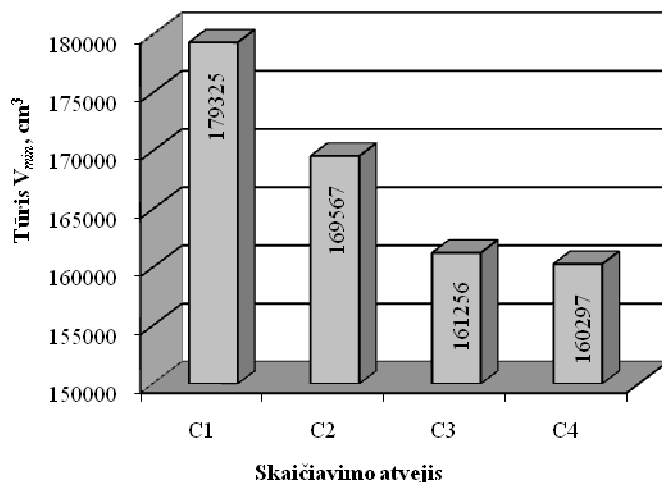
$$\text{C1} \quad -6 \leq u_{r22} \leq 6, -6 \leq u_{r23} \leq 6;$$

$$\text{C2} \quad -12 \leq u_{r22} \leq 12, -12 \leq u_{r23} \leq 12;$$

$$\text{C3} \quad -18 \leq u_{r22} \leq 18, -18 \leq u_{r23} \leq 18;$$

$$\text{C4} \quad -24 \leq u_{r22} \leq 24, -24 \leq u_{r23} \leq 24.$$

Poslinkių apribojimai įrašomi milimetrais. Minimalaus tūrio kitimas priklauso-
 mai nuo užduotų apribojimų parodytas 2.5 paveiksle.



2.5 pav. Minimalus rėmo tūris V_{min}

Fig. 2.5. Variation of frame minimal volume V_{min}

Liekamieji poslinkiai u_{r22} ir u_{r23} , plastinės deformacijos ir skaičiuojamieji pjūviai, kuriuose atsivėrė plastiniai lankstai, kiekvienam skaičiavimo atvejui pateikti 2.1 lentelėje.

2.1 lentelė. Sijų liekamieji poslinkiai u_{ri}

Table 2.1. Residual displacements u_{ri} of beams

Skaičiavimo atvejai	u_{r22} , mm	u_{r23} , mm	Pjūviai, kuriuose pasireiškė plastinės deformacijos
C1	6,0	6,0	7, 8, 14, 20, 22, 29
C2	12,0	12,0	8, 14, 15, 20, 22, 29
C3	18,0	18,0	7, 8, 14, 15, 20, 22, 29, 30
C4	24,0	14,48	7, 8, 14, 15, 20, 22, 29, 30

2.7. Patikrinamojo uždavinio matematinis modelis

Prisitaikomumo būvio patikrinamasis uždavinys yra formuluojamas taip: *esant pateiktam konstrukcijos ribinių įrašų vektoriui S_0 , ieškomos apkrovos kitimo*

ribos F_{inf} , F_{sup} , tenkinančios optimalumo kriterijų $\max (T_{inf}^T F_{inf} + T_{sup}^T F_{sup})$ ir konstrukcijos prisitaikomumo bei standumo apribojamąsias sąlygas.

Čia T_{inf} , T_{sup} yra patikrinamojo kriterijaus svorio koeficientų vektoriai. Šią uždavinio formuluotę atitinka toks apkrovos kitimo ribų optimizavimo uždavinio matematinis modelis: rasti

$$\max (T_{sup}^T F_{sup} - T_{inf}^T F_{inf}), \quad (2.29)$$

kai

$$\Phi G \lambda \leq S_0 - \Phi S_{ej}, \quad (2.30)$$

$$\lambda_j^T [S_0 - \Phi (G \lambda + S_{ej})] = 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad (2.31)$$

$$\lambda = \sum_j \lambda_j \quad \text{visiems } j \in J, \quad (2.32)$$

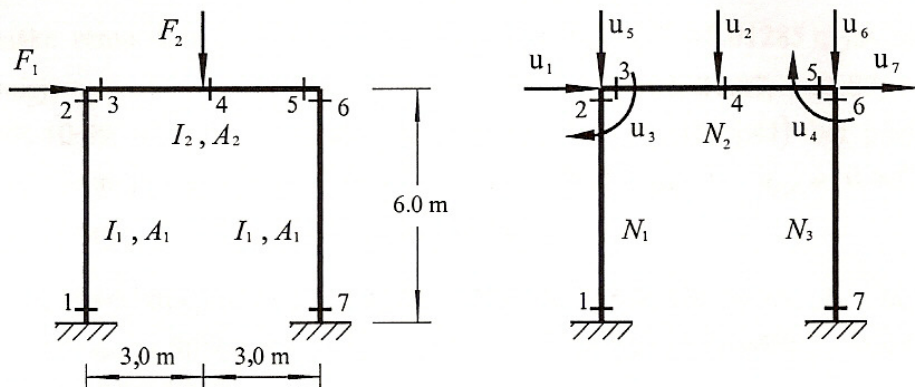
$$S_{ej} = \alpha_j (F_{sup}, F_{inf}), \quad F_{max} \geq F_{sup} \geq 0, \quad F_{min} \geq F_{inf} \geq 0, \quad (2.33)$$

$$u_{r,min} \leq H \lambda \leq u_{r,max}. \quad (2.34)$$

Tamprus skaičiavimo išraiškos S_{ej} yra apkrovos kitimo ribų F_{sup} , F_{inf} funkcijos α_j . Apkrovos ribų vektoriai F_{inf} , F_{sup} ir plastinių daugiklių vektoriai λ yra uždavinio (2.29)–(2.34) nežinomieji. Apribojamosios sąlygos (2.31) užtikrina konstrukcijos prisitaikomumą. Poslinkiai ribojami (2.34) analogiškai kaip ir konstrukcijos parametrų optimizavimo uždavinio matematiniam modelyje (2.22)–(2.27). Būvis, artimas ciklinei plastiškajai suirčiai, gaunamas tuomet, jei sąlygos (2.34) ignoruojamos.

2.8. Patikrinamojo uždavinio pavyzdys

Nagrinėjamas rėmas (2.6 pav.), kurio kolonomis naudojami HE ir rygeliai IPE tipo profiliai (2.2 lentelė), pagaminti iš plieno (takumo riba $\sigma_y = 240$ MPa, tampumo modulis $E = 2 \cdot 10^5$ MPa,) ir yra veikiamas KKA $0 \leq F_1 \leq F_{1,sup}$, $0 \leq F_2 \leq F_{2,sup}$.



2.6 pav. Rėmo skaičiuojamoji schema ir jo diskretinis modelis

Fig. 2.6. Scheme of frame and discrete model

2.2 lentelė. Skerspjūvių charakteristikos

Table 2.2. Characteristics of cross-sections

Charakteristika	HE240A	IPE400
$I \text{ m}^4$	$776,3 \cdot 10^{-7}$	$231,3 \cdot 10^{-6}$
$A \text{ m}^2$	$7,684 \cdot 10^{-3}$	$8,446 \cdot 10^{-3}$
$W_{pl} \text{ m}^3$	$744,6 \cdot 10^{-6}$	$130,7 \cdot 10^{-5}$
$M_0 = \sigma_y \cdot W_{pl} \text{ kNm}$	178,7	313,68
$N_0 = \sigma_y \cdot A \text{ kN}$	1844,16	2027,04
$c = \frac{M_0}{N_0} \text{ m}$	0,0969	0,15475

Patikrinamasis uždavinys $\max(F_{1,sup} + F_{2,sup})$ sprendžiamas pagal matematinį modelį (2.29)–(2.34). Šiuo atveju rėmo elementų skerspjūviai yra žinomi ir kolonomis naudojami HE240A, o rygeliui – IPE400.

Neįvertinus standumo reikalavimų (6) gauta $F_{1,sup}^* = 65,189 \text{ kN}$ ir $F_{2,sup}^* = 281,64 \text{ kN}$ t.y. $\max(F_{1,sup} + F_{2,sup}) = 346,8 \text{ kN}$.

```

TIKSLO FUNKCIJOS REIKSMĖ:      346844,388365379

{FSUP, FINF} - OPTIMALUS SPRENDINYS. APKROVOS KITIMO RIBU VEKTORIUS
      1              2              3              4
-----
1      0,65161E+05      0,28168E+06      -0,59219E-06      0,00000E+00

NENULINIAI VEKTORIAUS LIAMBDA KOMPLEMENTAI
LIAMBDA(      15 ) =      6,353455839280743E-002      Ketvirtas pjūvis
LIAMBDA(      24 ) =      4,568617333917271E-002      Šeštas pjūvis
LIAMBDA(      28 ) =      9,739711300461872E-003      Septintas pjūvis

{SR} - LIEKAMUJŲ IRAZŲ VEKTORIUS
      1              2              3              4              5              6
-----
1      -0,74068E+05      0,78766E+05      -0,78766E+05      -0,32577E+05      -0,13613E+05      0,13613E+05
      7              8              9              10
-----
1      -0,18311E+05      -0,15396E+05      -0,78304E+03      0,15396E+05

{UR} - LIEKAMUJŲ POSLINKIŲ VEKTORIUS
      1              2              3              4              5              6
-----
1      0,87686E-01      0,94818E-01      0,29531E-01      -0,29778E-01      0,60111E-04      0,53107E-02
      7
-----
0,77851E-01

```

[vertinus standumo reikalavimus $-\infty \leq u_{r,1} \leq 20$ mm, $-\infty \leq u_{r,1} \leq 25$ mm, gauta $F_{1,sup}^* = 67,802$ kN ir $F_{2,sup}^* = 259,22$ kN ($\max(F_{1,sup} + F_{2,sup}) = 327,226$ kN).

2.9. Antrojo skyriaus išvados

1. Prisitaikiosios konstrukcijos analizės uždavinio matematinis modelis suponuoja naują teorinį teiginį: konstrukcija visada prisitaikys, jei analizės uždavinys (projektinis ar patikrinamasis) turi nors vieną leistinąjį tašką.
2. Plastinis konstrukcijų skaičiavimas nuo apkrovų derinių turi būti grindžiamas prisitaikomumo teorija, įgalinančia išvengti detalios apkrovimo istorijos nagrinėjimo.
3. Tiesioginio optimizavimo uždaviniai yra pagrindas plėtoti diskretinį optimizavimą.

Prisitaikančių konstrukcijų optimizavimas projektavimo standartuose

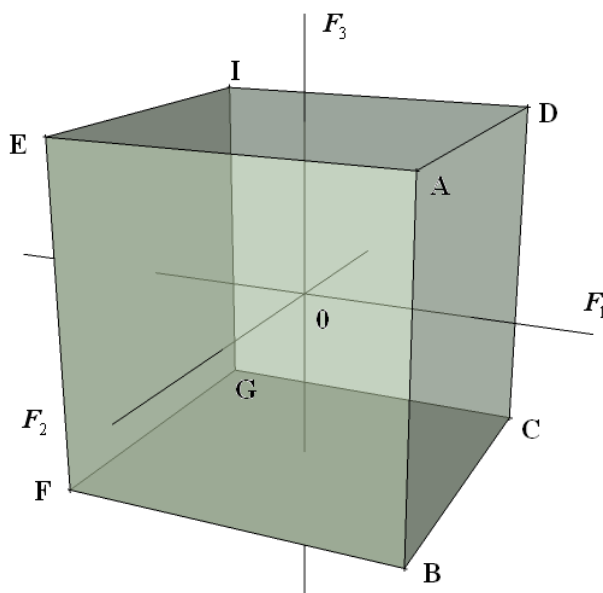
Prisitaikančių strypinių konstrukcijų optimalaus projektavimo aspektai, įvertinant stiprumo ir standumo sąlygas, yra išsamiai išnagrinėti (Maier 1969; König 1987; Atkočiūnas 1999, Tin-Loi 2000; Merkevičiūtė ir Atkočiūnas 2006). Tuo tarpu tampriųjų plastinių rėmų optimizavimo uždaviniuose klumpamosios galios sąlygų įvertinimas, kai apkrova kartotinė-kintamoji, ir dabartiniu metu lieka aktualia moksline problema. Pavyzdžiui, pagal EN1993 yra leidžiama projektuoti tampriuosius plastinius rėmus, tačiau čia nepilnai detalizuota metodika bei algoritmai prisitaikančių konstrukcijų klumpamosios galios įvertinimui. Šiame skyriuje nagrinėjami projektinio bei patikrinamojo uždavinių netiesiniai matematiniai modeliai, kuriuose yra įvertinami stiprumo, standumo ir klumpamosios galios apribojimai. Klumpamosios galios įvertinimui sukurta metodika ir algoritmai, apjungiantys komercinį kompiuterinį konstrukcijų projektavimo paketą MatrixFrame 4.1 su autorių sukurtomis netiesinių matematinio programavimo uždavinių sprendimo programomis. Visiems kitiems tyrėjams tai suteikia galimybę netiesinio matematinio programavimo uždavinių sprendinius (liekamąsias įrašas ir liekamuosius poslinkius) integruoti į jų turimas konstrukcijų projektavimo programas. Skyriaus tematika paskelbti trys

autorius straipsniai (Atkočiūnas *et al.* 2007a; Atkočiūnas ir Venskus 2008b, 2011).

3.1. Apkrovų deriniai – kartotinės-kintamosios apkrovos viršūnės

Pažymėtina, jog apkrovų kombinacijos, kurios aktualios inžinerinėje praktikoje, gali būti modeliuojamos kaip atskiras KKA atvejis. Tarkime visų galimų apkrovų F_j , kai $j=3$, kitimo ribų $F_{j,inf}$, $F_{j,sup}$ skaičius yra $p=2^3=8$. Tada apkrovos kitimo sritis (3.1 pav.) užrašoma j -mate prizme ABCDEFGI:

- A) $F_{1,sup} + F_{2,sup} + F_{3,sup}$; B) $F_{1,sup} + F_{2,sup} + F_{3,inf}$;
 C) $F_{1,sup} + F_{2,inf} + F_{3,inf}$; D) $F_{1,sup} + F_{2,inf} + F_{3,sup}$;
 E) $F_{1,inf} + F_{2,sup} + F_{3,sup}$; F) $F_{1,inf} + F_{2,sup} + F_{3,inf}$;
 G) $F_{1,inf} + F_{2,inf} + F_{3,inf}$; I) $F_{1,inf} + F_{2,inf} + F_{3,sup}$;



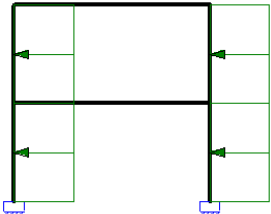
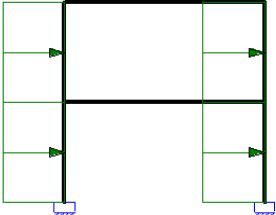
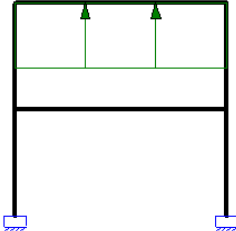
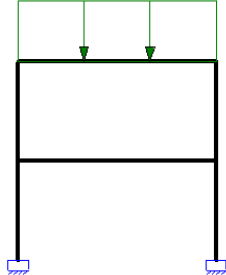
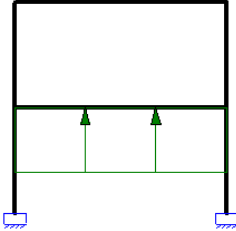
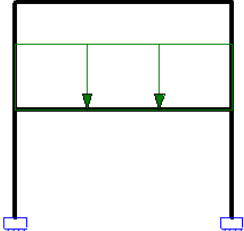
3.1 pav. KKA kitimo sritis

Fig. 3.1. Repeated variable load variation domain

Kiekviena apkrova F_j laike t gali kisti tarp savo ribų $F_{j,inf}$, $F_{j,sup}$. Pavyzdžiui apkrova F_1 gali aprašyti vėją (3.1 lentelė).

3.1 lentelė. Apkrovos F_1 , F_2 , F_3

Table 3.1. Loads F_1 , F_2 , F_3

	$F_{j,inf}$	F_j	$F_{j,sup}$
$j = 1$	 $F_{1,inf}$	$\leq F_1 \leq$	 $F_{1,sup}$
$j = 2$	 $F_{2,inf}$	$\leq F_2 \leq$	 $F_{2,sup}$
$j = 3$	 $F_{3,inf}$	$\leq F_3 \leq$	 $F_{3,sup}$

Tokių atveju apkrovos kitimo ribos $F_{1,inf}$ reiškia maksimalią galimą vėjo apkrovą iš konstrukcijos dešinės pusės, o $F_{1,sup}$ – maksimalią galimą vėjo apkrovą iš konstrukcijos kairės pusės. Analogiškai F_2 gali aprašyti sniego apkrovą, kur $F_{2,inf}$ yra maksimali galima sniego apkrova iš konstrukcijos apačios ir $F_{2,sup}$ – maksimali galima sniego apkrova iš konstrukcijos viršaus. Be abejo, apkrova $F_{2,inf}$ negalima, tačiau čia paminėta dėl matematinio formalumo. Kai apkrova negalima, visada jos ribą galime prilyginti nuliui. Trečioji apkrova F_3 gali aprašyti naudingą apkrovą. Tada $F_{3,inf}$ reikš naudingą apkrovą iš apačios (vėlgai ne labai įmanoma), bei $F_{3,sup}$ – naudinga apkrova iš viršaus. Tokiu būdu galima įvertinti kiek norima įvairių apkrovų. Apkrovų kombinacijos per apkrovos viršūnes, įvedus papildomus daugiklius, užrašomos sekančiai:

$$1) k_{11}F_{1,sup} + k_{12}F_{2,sup} + k_{13}F_{3,sup},$$

$$2) k_{21}F_{1,sup} + k_{22}F_{2,sup} + k_{23}F_{3,inf},$$

$$3) k_{31}F_{1,sup} + k_{32}F_{2,inf} + k_{33}F_{3,inf},$$

$$4) k_{41}F_{1,sup} + k_{42}F_{2,inf} + k_{43}F_{3,sup},$$

$$5) k_{51}F_{1,inf} + k_{52}F_{2,sup} + k_{53}F_{3,sup},$$

$$6) k_{61}F_{1,inf} + k_{62}F_{2,sup} + k_{63}F_{3,inf},$$

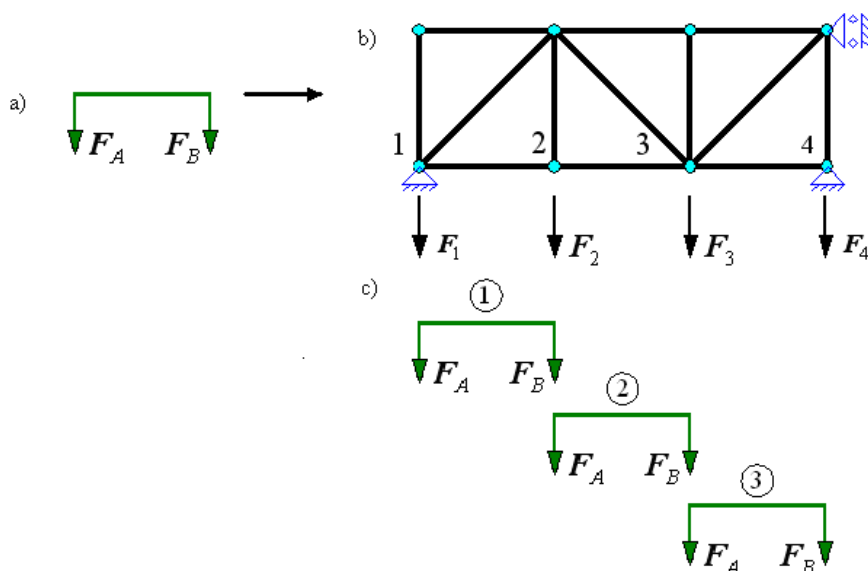
$$7) k_{71}F_{1,inf} + k_{72}F_{2,inf} + k_{73}F_{3,inf},$$

$$8) k_{81}F_{1,inf} + k_{82}F_{2,inf} + k_{83}F_{3,sup}.$$

kai daugiklių (apkrovų kombinacijų koeficientų) reikšmės $k_{11}, k_{12}, \dots, k_{83}$ bei apkrovų kitimo ribos $F_{j,inf}$, $F_{j,sup}$ nustatomos pagal nacionalinių standartų reikalavimus. Jei tam tikros apkrovos pagal standartų reikalavimus yra nesuderinamos (pavyzdžiui sniegas ir vėjas) tai koeficientas prie nesuderinamos apkrovos yra prilyginamas nuliui. Apkrovų kitimo ribos gali būti nustatomos pagal inžinieriams parengtas reikšmes, kurias galima rasti standartų lentelėse, arba panaudojant statistinius skaičiavimus. Pavyzdžiui, vėjo arba sniego ribines apkrovas galima nustatyti pagal tam tikro regiono meteorologinius duomenis. Tokiu būdu KKA įvertina ir statistinę apkrovos prigimtį.

3.2. Judama apkrova – atskiras kartotinės-kintamosios apkrovos atvejis

Vienas iš apkrovų tipų yra judama apkrova. Ji aktuali potiltinėms sijoms (pramonės pastatuose) arba santvaroms sudarančioms tiltų konstrukcijas. Judama apkrova gali būti modeliuojama vienu, dviem arba keletu koncentruotų jėgų. Pavyzdžiui, judama apkrova sudaryta iš dviejų koncentruotų jėgų poros F_A ir F_B (3.1 pav., a) veikia apatinę santvaros (3.1 pav., b) dalį.



3.2 pav. Judama apkrova išreikšta per KKA

Fig. 3.2. Moving load in terms of repeated variable load

Judama apkrova santvaros apatinėje juostoje gali užimti padėtis 1, 2 arba 3 (3.1 pav., c).

Kai santvara (3.1 pav., b) apkrauta KKA, kur kiekviena iš jėgų F_j , kai $j = 4$, gali kisti tarp apkrovos kitimo ribų $F_{j,inf}$, $F_{j,sup}$. Apkrovų viršūnių skaičius $p=2^4=16$:

- 1) $F_{1,sup} + F_{2,sup} + F_{3,sup} + F_{4,sup}$, 2) $F_{1,sup} + F_{2,sup} + F_{3,sup} + F_{4,inf}$,
- 3) $F_{1,sup} + F_{2,sup} + F_{3,inf} + F_{4,sup}$, 4) $F_{1,sup} + F_{2,sup} + F_{3,inf} + F_{4,inf}$,
- 5) $F_{1,sup} + F_{2,inf} + F_{3,sup} + F_{4,sup}$, 6) $F_{1,sup} + F_{2,inf} + F_{3,sup} + F_{4,inf}$,
- 7) $F_{1,sup} + F_{2,inf} + F_{3,inf} + F_{4,sup}$, 8) $F_{1,sup} + F_{2,inf} + F_{3,inf} + F_{4,inf}$,
- 9) $F_{1,inf} + F_{2,sup} + F_{3,sup} + F_{4,sup}$, 10) $F_{1,inf} + F_{2,sup} + F_{3,sup} + F_{4,inf}$,
- 11) $F_{1,inf} + F_{2,sup} + F_{3,inf} + F_{4,sup}$, 12) $F_{1,inf} + F_{2,sup} + F_{3,inf} + F_{4,inf}$,
- 13) $F_{1,inf} + F_{2,inf} + F_{3,sup} + F_{4,sup}$, 14) $F_{1,inf} + F_{2,inf} + F_{3,sup} + F_{4,inf}$,
- 15) $F_{1,inf} + F_{2,inf} + F_{3,inf} + F_{4,sup}$, 16) $F_{1,inf} + F_{2,inf} + F_{3,inf} + F_{4,inf}$.

Įvertinus, kad $F_{j,inf} = 0$, $j = 1, \dots, 4$ (judama apkrova negali veikti iš apačios į viršų), bei tai, jog judama apkrova veikia tik dviejuose gretimuose apatinės santvaros juostos mazguose iš šešiolikos apkrovos viršūnių lieka trys:

$$1) F_{1,sup} + F_{2,sup},$$

$$2) F_{2,sup} + F_{3,sup},$$

$$3) F_{3,sup} + F_{4,sup}.$$

Įvertinus judamos apkrovos reikšmes $F_{maxAB} = \max(F_A, F_B)$ gaunamos tokios apkrovos kitimo ribos:

$$1) 0 \leq F_{1,sup} \leq F_{maxAB},$$

$$2) 0 \leq F_{2,sup} \leq F_{maxAB},$$

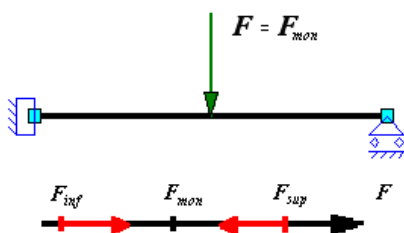
$$3) 0 \leq F_{3,sup} \leq F_{maxAB},$$

$$4) 0 \leq F_{4,sup} \leq F_{maxAB},$$

Taigi kaip matome iš pastarųjų formulų judamos apkrovos deriniai yra poaibis KKA t. y. judama apkrova gali būti užrašoma per KKA viršūnes.

3.3. Vienkartė apkrova – atskiras kartotinės-kintamosios apkrovos atvejis

Kai konstrukcija yra veikiamą vienkartės apkrovos F_{mon} (3.3 pav.) ją taip pat galima aprašyti kaip KKA. Tokiu atveju apkrova F_{mon} užrašoma per kintamą apkrovą F , $F_{inf} \leq F \leq F_{sup}$, kur priimama, kad apkrovos F kitimo ribos sutampa ties reikšme F_{mon} t. y. $F_{inf} = [F \equiv F_{mon}] = F_{sup}$ (galima užrašyti ir kitaip: $F_{inf} = F_{sup} = F_{mon}$).



3.3 pav. Vienkartė apkrova išreikšta per KKA

Fig. 3.3. Monotonically increasing load in terms of repeated variable load

Taigi vienkartė apkrova gali būti užrašoma per KKA, t. y. vienkartė apkrova yra atskiras KKA atvejis. Projektinio (2.22)–(2.27) ir patikrinamojo (2.29)–(2.34) uždavinių matematiniai modeliai vienkartės apkrovos atvejui parodyti 3.2 lentelėje.

3.2 lentelė. Optimizavimo matematiniai modeliai vienkartės apkrovos atveju

Table 3.2. Optimization mathematical models in case of monotonically increasing load

Projektinis uždavinys	Patikrinamasis uždavinys
rasti $\min (L^T S_0 + \lambda^T \varphi),$ kai $\varphi = \Gamma S_0 - \Phi(G\lambda + S_e) \geq 0,$ $\lambda \geq 0,$ $S_{min} \leq S_0 \leq S_{max},$ $u_{min} \leq (u_r + u_e) \leq u_{max}.$	rasti $\max (T^T F - \lambda^T \varphi),$ kai $\varphi = S_0 - \Phi(G\lambda + S_e) \geq 0,$ $\lambda \geq 0,$ $0 \leq F \leq F_{mon},$ $u_{min} \leq (u_r + u_e) \leq u_{max}.$

3.4. Stiprumo, standumo ir klumpamosios galios įvertinimas optimizavimo uždaviniuose

Pagrindinis inžinierinis tikslas projektuojant konstrukcijas yra stiprumo, standumo ir klumpamosios galios reikalavimų užtikrinimas (Žiliukas 2004, Čižas 1993). Taipogi šalia paminėtų reikalavimų konstrukcija turi būti optimali t. y. jos kaina turi būti minimali. Kitas aktualus uždavinys renovuojant konstrukcijas, yra laikomosios galios patikra, kurios metu reikia nustatyti ar konstrukcija gebės atlaikyti tam tikra papildoma apkrovą (pavyzdžiui jei bus pristatytas papildomas pastato aukštas), kuri nepažeis stiprumo standumo ir klumpamosios galios reikalavimų. Konstrukcijų projektavimas yra atliekamas laikantis projektavimo standartų reikalavimų. Šiame poskyryje bus parodyta kaip optimizavimo uždaviniuose yra įvertinamas stiprumas, standumas ir klumpamoji galia laikantis projektavimo standartų reikalavimų.

3.4.1. Optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai

Projektinio uždavinio matematinis modelis (2.22)–(2.27) praktiniam uždavinių sprendimui yra užrašomas:

rasti

$$\min \left(\mathbf{L}^T \mathbf{S}_0 + \boldsymbol{\lambda}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j \right), \quad (3.1)$$

kai

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{F} \mathbf{S}_0 - \boldsymbol{\Phi} \left(\mathbf{G} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej} + \mathbf{S}_{ec} \right) \geq \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \sum_j \boldsymbol{\lambda}_j, \quad j \in J, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{S}_{\min} \leq \mathbf{S}_0 \leq \mathbf{S}_{\max}; \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq (\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_{ec}) \leq \mathbf{u}_{\max}. \quad (3.5)$$

Apkrovos optimizavimo uždavinys (2.29)–(2.34) užrašomas sekančiai:

rasti

$$\max \left(\mathbf{T}_{sup}^T \mathbf{F}_{sup} - \mathbf{T}_{inf}^T \mathbf{F}_{inf} - \boldsymbol{\lambda}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j \right), \quad (3.6)$$

kai

$$\varphi_j = S_0 - \Phi(G\lambda + S_{ej} + S_{ec}) \geq 0, \quad (3.7)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \lambda = \sum_j \lambda_j, \quad j \in J, \quad (3.8)$$

$$0 \leq F_{sup} \leq F_{max}, \quad F_{min} \leq F_{inf} \leq 0; \quad (3.9)$$

$$u_{min} \leq (u_r + u_{ej} + u_{ec}) \leq u_{max}. \quad (3.10)$$

Matematinuose modeliuose vektorius S_{ec} išreiškia tamprias įrašas nuo pastovios apkrovos F_c (pavyzdžiui, nuosavas konstrukcijų svoris), bei atitinkamai u_{ec} reiškia tamprius poslinkius nuo pastovios apkrovos F_c .

Labai naudingas matematinis įrankis tiesiniam ir netiesiniam matematiniam programavimui yra Lagranžo apribojimų atlaisvinimas (lagrangian relaxation) (Ravindra *et al.* 1993, Bertsekas 2003). Šio metodo esmė ta, kad sudėtingus apribojimus, apsunkinančius optimizavimo procesą, padaugintus iš neneigiamų daugiklių galima nukelti į tikslo funkciją. Optimaliame plane neneigiami daugikliai įgauna Langranžo daugiklių prasmę, o nukeltųjų apribojimų sandauga su jais atitinka matematinio griežtumo sąlygą arba kitaip tariant matematinio griežtumo sąlyga yra nukeliama į tikslo funkciją. Šis metodas yra įgyvendintas matematiniuose modeliuose (3.1)–(3.5) ir (3.6)–(3.10). Optimizavimas tokiu atveju vyksta efektyviau, nes kiekvieno optimizavimo žingsnio metu nereikalaujama tenkinti matematinio griežtumo sąlygos, kuri turi būti tenkinama tik optimaliame plane.

Matematiniam modelyje (3.1)–(3.5) pradiniai skerspjūviai turi būti parinkti tokie, kad tenkintųsi sąlyga (3.5) t. y. tamprūs poslinkiai turi neišeiti iš užsiduotų maksimalių poslinkių ribų u_{min} ir u_{max} .

3.4.2. Klumpamosios galios skaičiavimas pagal EN1993 projektavimo standartą

EN1993 projektavimo standarto atveju strypų klumpamoji galia skaičiuojama pagal projektavimo standarto formules:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1.0, \quad (3.11)$$

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1.0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}}}{\gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{\frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}}}{\gamma_{M1}} + k_{yz} \frac{\frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\gamma_{M1}}}{\gamma_{M1}} \leq 1, \quad (3.13)$$

$$\frac{\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}}}{\gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{\frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}}}{\gamma_{M1}} + k_{zz} \frac{\frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\gamma_{M1}}}{\gamma_{M1}} \leq 1, \quad (3.14)$$

čia y - y – juostoms lygiagreti skerspjūvio ašis; z - z – juostoms statmena skerspjūvio ašis; N_{Ed} – skaičiuotinė gniuždomosios jėgos reikšmė; $N_{b,Rd}$ – skaičiuotinė gniuždomojo elemento klumpamoji galia; M_{Ed} – skaičiuotinė momento reikšmė; $M_{b,Rd}$ – skaičiuotinė lenkiamosios klumpumo galios reikšmė.

N_{Ed} , $M_{y,Ed}$ ir $M_{z,Ed}$ – skaičiuotinės gniuždomosios jėgos ir didžiausiųjų momentų atitinkamai aplink y - y ir z - z ašis išilgai elemento reikšmės; $\Delta M_{y,Ed}$, $\Delta M_{z,Ed}$ – momentai, susidarantys dėl sunkio centro ašies poslinkio pagal EN1993#6.2.9.3 nuostatas 4 klasės skerspjūviams, žr. EN1993#6.7 lentelę; χ_y ir χ_z – lenkiamojo klumpumo koeficientai pagal EN1993#6.3.1; N_{Rk} – charakteristinė ašinė kritinio skerspjūvio gniuždomoji galia; $M_{y,Rk}$, $M_{z,Rk}$ – charakteristinės kritinio skerspjūvio lenkiamosios galios atitinkamai aplink y - y ir z - z ašis išilgai elemento reikšmės; χ_{LT} – skersinio-sukamojo klumpumo koeficientas pagal EN1993#6.3.2; k_{yy} , k_{yz} , k_{zy} , k_{zz} – sąveikos koeficientai; γ_{M1} – dalinis elementų klumpumo laikomosios galios koeficientas.

Formulė (3.11) įvertina tik ašinio gniuždymo elemento klumpamąją galia, o (3.12) – tik lenkiamojo elemento klumpamąją galia. Elementai, kuriuos kartu veikia lenkimas ir ašinis gniuždymas turi atitikti formulį (3.13) ir (3.14) reikalavimus. Plastinės deformacijos klumpamosios galios skaičiavimo formulėse įvertinamos per charakteristines kritinio skerspjūvio lenkiamosios galios $M_{y,Rk}$, $M_{z,Rk}$ reikšmes kurios išreiškia ribinius lenkimo momentus apie y - y ir z - z ašis. O liekamosios įrašos įvertinamos per N_{Ed} , $M_{y,Ed}$ ir $M_{z,Ed}$ t. y. per suminį poveikį (suma tampriųjų ir liekamųjų įrašų): $N_{Ed} = N_e + N_r$, $M_{y,Ed} = M_{y,e} + M_{y,r}$ ir $M_{z,Ed} = M_{z,e} + M_{z,r}$.

3.4.3. Klumpamosios galios skaičiavimas pagal NEN6771 projektavimo standartą

Klumpamoji galia pagal projektavimo standartą NEN6771 apskaičiuojama pagal formules:

$$\frac{N_{c;s;d}}{\omega_{z;buc} N_{c;u;d}} \leq 1, \quad (3.15)$$

$$\frac{N_{c;s;d}}{\omega_{y;buc} N_{c;u;d}} \leq 1, \quad (3.16)$$

$$\frac{M_{y;max;s;d}}{\omega_{kip} M_{y;u;d}} \leq 1, \quad (3.17)$$

$$\frac{N_{c;s;d}}{N_{c;u;d}} + \frac{n_y}{n_y - 1} \frac{M_{y;equ;s;d} + F_{y;tot;s;d} e_y^*}{\omega_{kip} M_{y;u;d}} + \frac{n_z}{n_z - 1} \frac{\chi_y M_{z;equ;s;d}}{M_{z;u;d}} \leq 1, \quad (3.18)$$

$$\frac{N_{c;s;d}}{N_{c;u;d}} + \frac{n_y}{n_y - 1} \frac{\chi_z M_{y;equ;s;d}}{\omega_{kip} M_{y;u;d}} + \frac{n_z}{n_z - 1} \frac{M_{z;equ;s;d} + F_{z;tot;s;d} e_z^*}{M_{z;u;d}} \leq 1, \quad (3.19)$$

čia y - y – juostoms lygiagreti skerspjūvio ašis; z - z – juostoms statmena skerspjūvio ašis; $N_{c;s;d}$ – skaičiuotinė gniuždomosios jėgos reikšmė; $N_{c;u;d}$ – skaičiuotinė ašinė skerspjūvio gniuždomoji galia; $\omega_{y;buc}$, $\omega_{z;buc}$ – klupumo koeficientai atitinkamai aplink y - y ir z - z ašis, žr. NEN6771#12.1.1.4; $M_{y;max;s;d}$ – skaičiuotinė lenkiamojo momento reikšmė; $M_{y;u;d}$, $M_{z;u;d}$ – skaičiuotinė lenkiamoji galia; ω_{kip} – klupumo koeficientas; n_y , n_z – proporcijos koeficientai; $M_{y;equ;s;d}$, $M_{z;equ;s;d}$ – ekvivalentinės skaičiuotinės lenkiamojo momento reikšmės atitinkamai aplink y - y ir z - z ašis; $F_{y;tot;s;d}$, $F_{z;tot;s;d}$ – skaičiuotinės suminės gniuždomosios apkrovos reikšmės; e_y^* , e_z^* – ekscentricitetai atitinkamai y - y ir z - z ašies atžvilgiu; χ_y , χ_z – koeficientai priklausantys nuo nagrinėjamos konstrukcijos konfigūracijos;

Formulės (3.15) ir (3.16) įvertina tik ašinio gniuždymo elemento klumpamąją galia y-y ir z-z ašių atžvilgiu, atitinkamai, o (3.17) – tik lenkiamojo elemento klumpamąją galia. Elementai, kuriuos kartu veikia lenkimas ir ašinis gniuždymas turi atitikti formulių (3.18) ir (3.19) reikalavimus. Analogiškai EN1993, plastinės deformacijos NEN6771 standarte klumpamosios galios skaičiavimo formulėse įvertinamos per charakteristines kritinio skerspjuvio lenkiamosios galios $M_{y;u;d}$, $M_{z;u;d}$ reikšmes kurios išreiškia ribinius lenkimo momentus apie y-y ir z-z ašis. O liekamosios įrašos įvertinamos per skaičiuotines ašinės jėgos bei lenkimo momentų reikšmes: $N_{c;s;d}$, $M_{y;max;s;d}$, $M_{y;equ;s;d}$ ir $M_{z;equ;s;d}$.

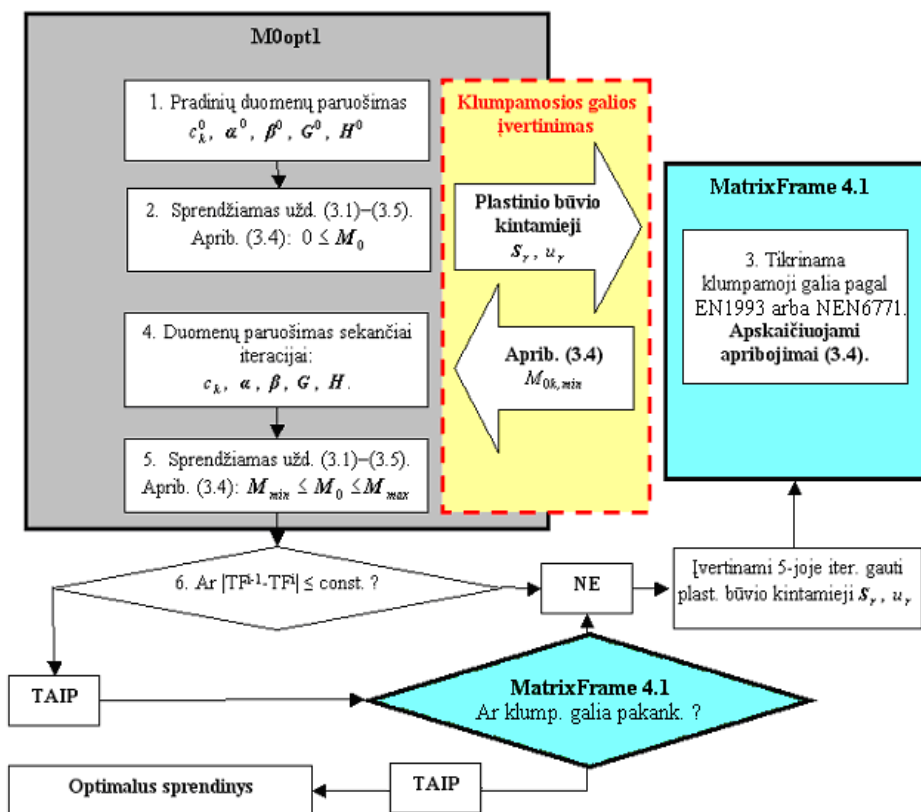
3.4.4. Klumpamosios galios įvertinimo algoritmas optimizavimo uždaviniuose

Inžinierinių poreikių įgyvendinimui yra sukurta daug projektavimo standartus realizuojančių komercinių kompiuterinių programų. Šiame skyriuje aprašytam klumpamosios galios įvertinimui yra naudojama komercinė kompiuterinė programa MatrixFrame 4.1. Klumpamosios galios reikalavimai programoje MatrixFrame yra tikrinami pagal abu paminėtus projektavimo kodus: EN1993 ir NEN6771. Klumpamoji galia matematiniuose modeliuose (3.1)–(3.5) ir (3.6)–(3.10) yra įvertinamas naudojant konstruktyvinius apribojimus (3.4) ir (3.9), kurie yra apskaičiuoti pagal projektavimo standartų EN1993 arba NEN6771 (gali būti ir kitų) reikalavimus.

Elementas k tenkina klumpamosios galios reikalavimus jei maksimali vienetinė patikra (unity check) UC_k apskaičiuota pagal projektavimo standartų reikalavimus yra mažesnė arba lygi vienetui t. y. $UC_k \leq 1$. UC_k yra elemento skaičiuotinės vertės ir skaičiuotinio atspario santykis. Pavyzdžiui, kai elementas k yra tik gniuždomas pagal EN1993 yra taikoma formulė (3.11), kur santykis

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \text{ įgauna vienetinės patikros prasmę t. y. } UC_k = \frac{N_{k,Ed}}{N_{k,b,Rd}} \leq 1.$$

- Rėmo projektinis uždavinys yra sprendžiamas pagal matematinį modelį (3.1)–(3.5) iteracijomis. Iteracijų blokschema parodyta 3.4 paveiksle.



3.4 pav. Klumpamosios galios įvertinimo projektiniame uždavinyje schema

Fig. 3.4. Flowchart of the proposed solution algorithm for the design problem

Iteracija 1. Influentinės matricos α^0 , β^0 , G^0 , H^0 ir takumo sąlygų koeficientai c_k^0 , $k \in K$ yra apskaičiuojami pagal užsiduotus pradinius skerspjūvius A_k^0 , $k \in K$. Uždavinio kintamųjų M_{0k} apribojimai yra $M_{0k,min} = 0 \leq M_{0k} \leq M_{0k,max} = \infty$ (ribojamas tik kintamųjų M_{0k} ženklas).

Iteracija 2. Sprendžiamas uždavinys (3.1)–(3.5) ir gaunamas naujas ribinių momentų M_{0k}^* , $k \in K$ pasiskirstymas. Naujų skerspjūviai gali būti parenkami dviem būdais: keičiant skerspjūvių dimensijas (tolydus optimizavimas) arba

parenkant juos iš skerspjūvių sortamento pagal formulę $W_{pl}^* \geq M_{0k}^* / \sigma_{yk}$ (diskretinis optimizavimas).

Iteracija 3. Plastinio būvio kintamieji, liekamosios įrašos S_r ir liekamieji poslinkiai u_r , yra integruojami į MatrixFrame klumpamosios galios skaičiavimus. Jei maksimali klumpamosios galios patikra $UC_k > 1$, $k \in K$, tai keičiant skerspjūvių parametrus arba parenkat juos iš sortamento surandami skerspjūviai tenkinantys atspario reikalavimus $UC_k \leq 1$. Tokiu būdu randami minimalūs ribiniai $M_{0k,min}$. Tai reiškia, kad sekančioje iteracijoje ribiniai momentai M_{0k} turi būti didesni arba lygūs $M_{0k,min}$.

Iteracija 4. Apskaičiuojamos naujos influentinės matricos α , β , G , H , ir koeficientai c_k , $k \in K$ pagal antroje iteracijoje apskaičiuotus skerspjūvius A_k .

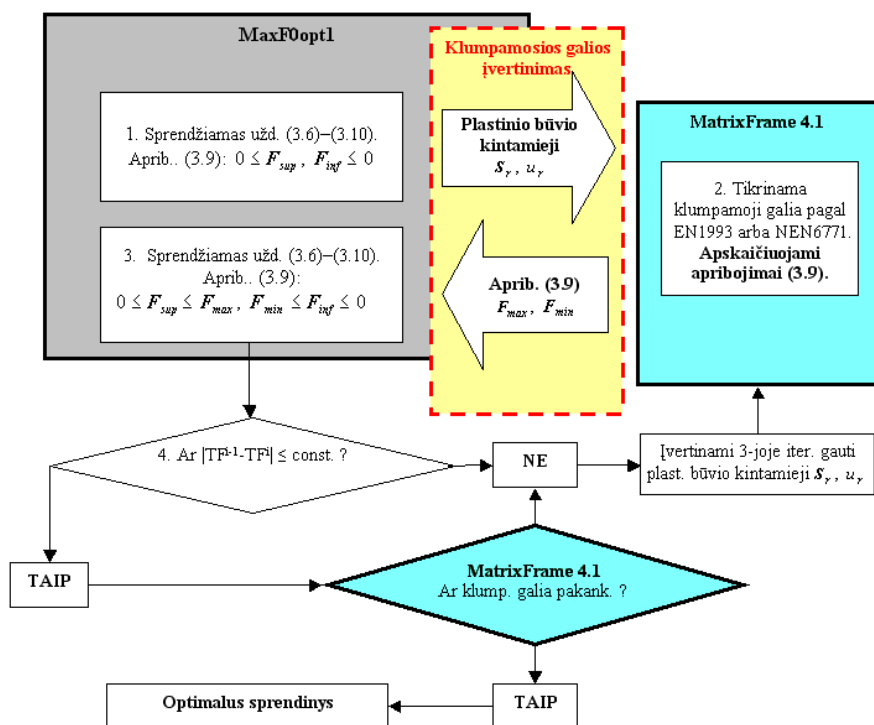
Iteracija 5. Sprendžiamas uždavinys (3.1)–(3.5) panaudojant ketvirtoje iteracijoje perskaičiuotas matricas α , β , G , H ir koeficientus c_k ir trečioje iteracijoje apskaičiuotus ribinių momentų ribines reikšmes $M_{0k,min}$.

Iteracija 6. Iteracijos 3–5 yra kartojamos tol kol apskaičiuotieji skerspjūviai A_k konverguoja norimu tikslumu.

Visų elementų k , $k \in K$ klumpamosios galios reikalavimai įvertinami iteracijoje 3 surandant tokius skerspjūvius A_k ($M_{0k,min}$), kurie tenkina reikalavimus $UC_k \leq 1$.

●● Rėmo apkrovos optimizavimo uždavinys sprendžiamas pagal matematinį modelį (3.6)–(3.10) sprendžiant jį iteracijomis. Iteracijų blokschema parodyta 3.5 pav.

Iteracija 1. Sprendžiamas uždavinys (3.6)–(3.10), surandamas naujas apkrovų kitimo ribų pasiskirstymas F_{sup} , F_{inf} . Uždavinio nežinomųjų apribojimai (3.9) F_{max} , F_{min} yra $0 \leq F_{sup} \leq F_{max} = \infty$, $F_{min} = -\infty \leq F_{inf} \leq 0$ (ribojamas tik nežinomųjų F_{sup} ir F_{inf} ženklas).



3.5 pav. Klumpamosios galios įvertinimo patikrinamajame uždavinyje schema

Fig. 3.5. Flowchart of the proposed solution algorithm for the checking problem

Iteracija 2. Plastinio būvio kintamieji, liekamosios įrašos S_r ir liekamieji poslinkiai u_r , yra integruojami į MatrixFrame klumpamosios galios skaičiavimus. Jei maksimali klumpamosios galios patikra $UC_k > 1$, $k \in K$, tai keičiant apkrovos sritį F_j randama tokia apkrovos sritis, kuri užtikrina $UC_k \leq 1$. Šiuo atveju randama apkrovos kitimo ribų apribojimai F_{max} ir F_{min} . Tai reiškia, kad sekančioje iteracijoje apkrovos kitimo ribos F_{sup} ir F_{inf} negali viršyti apkrovos kitimo ribų apribojimų F_{max} ir F_{min} užtikrinančių klumpamosios galios reikavimus.

Iteracija 3. Uždavinys (3.6)–(3.10) sprendžiamas panaudojant antroje iteracijoje apskaičiuotus apkrovų kitimo ribų apribojimus F_{max} ir F_{min} .

Iteracija 4. Iteracijos 2 ir 3 yra karojamos tol kol apkrovų kitimo ribos F_{sup} ir F_{inf} sutampa su prieš tai gautomis apkrovų kitimo ribomis norimu tikslumu.

Visų elementų k , $k \in K$ klumpamosios galios reikalavimai įvertinami iteracijoje 2 surandant tokius apkrovų kitimo ribų apribojimus F_{max} ir F_{min} , kurie tenkina reikalavimus $UC_k \leq 1$.

3.4.5. Optimizavimo programų ir MatrixFrame integruotas panaudojimas

Projektiniam optimizavimo uždaviniui spręsti naudojama M0opt1 programa, o patikrinamajam – MaxFopt1. Klumpamosios galios tikrinimui pasitelkiama komercinė programa MatrixFrame 4.1 su įdiegtais projektavimo standartais EN1993 ir NEN6771. Principiniai optimizavimo uždavinių sprendimo žingsniai, bei duomenų mainai parodyti 3.4 ir 3.5 paveiksluose. Šiame poskyryje bus detaliau apžvelgta plastinio būvio kintamųjų S_r ir u_r integracijos metodas į MatrixFrame programą.

MatrixFrame programoje apkrovų deriniai (P.C. – persisten combination) yra sudaromi iš apkrovimų (LC – load case), kur pastarieji sudaryti iš elementarių apkrovų (LD – load definition). Apkrovos gali būti koncentruotos, tolygiai išskirstytos, nuosavo svorio, temperatūrinės ir t. t.

Tarkime, rėmas yra veikiamas dviejų kintamų apkrovų: vėjo F_1 ir sniego F_2 , bei pastovios apkrovos F_c . Kai veikia dvi kintamos apkrovos, KKA viršūnių skaičius $p = 2^2 = 4$ t. y. rėmas yra veikiamas keturių apkrovos derinių (P.C.1 ÷ P.C.4 parodyti 3.6 pav. a). Vėjo ir sniego apkrovos kinta tarp ribų: $F_{1,inf} [= LC1] \leq F_1 \leq F_{1,sup} [= LC2]$, $F_{2,inf} [= LC4 = 0] \leq F_2 \leq F_{2,sup} [= LC3]$. Apkrovimai (LC) parodyti 3.6 b) paveiksle. Jame matome šešis apkrovimus, kur LC5 atitinka pastovią apkrovą $F_c [= LC5]$. Šeštasis apkrovimas LC6 (pav. 3.6 c) yra nulinis t. y. savyje jis turi vieną nuliui prilygintą apkrovą LD29. Šis apkrovimas sukurtas, kad atliktų duomenų konteinerio vaidmenį t. y. apkrovimą LC6 atitinkantys rezultatai yra užpildomi plastinio būvio kintamaisiais S_r ir u_r gautais iš optimizavimo programų, kurios savo ruožtu juos apskaičiuoja nuo apkrovų derinių P.C.1 ÷ P.C.4. KKA viršūnės atitinka apkrovų derinius:

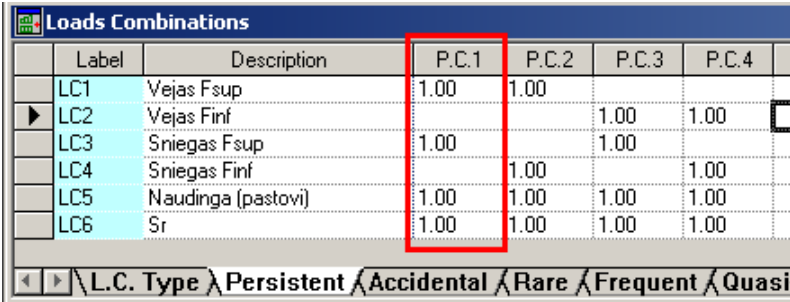
$$k_{11}F_{1,sup} + k_{12}F_{2,sup} + k_{13}F_c \Rightarrow \text{P.C.1} = k_{11}LC1 + k_{12}LC3 + k_{13}LC5 + 1.0*LC6,$$

$$k_{21}F_{1,sup} + k_{22}F_{2,inf} + k_{23}F_c \Rightarrow \text{P.C.2} = k_{21}LC1 + k_{22}LC4 + k_{23}LC5 + 1.0*LC6,$$

$$k_{31}F_{1,inf} + k_{32}F_{2,sup} + k_{33}F_c \Rightarrow \text{P.C.3} = k_{31}LC2 + k_{32}LC3 + k_{33}LC5 + 1.0*LC6,$$

$$k_{41}F_{1,inf} + k_{42}F_{2,inf} + k_{43}F_c \Rightarrow \text{P.C.4} = k_{41}LC2 + k_{42}LC4 + k_{43}LC5 + 1.0*LC6.$$

a)



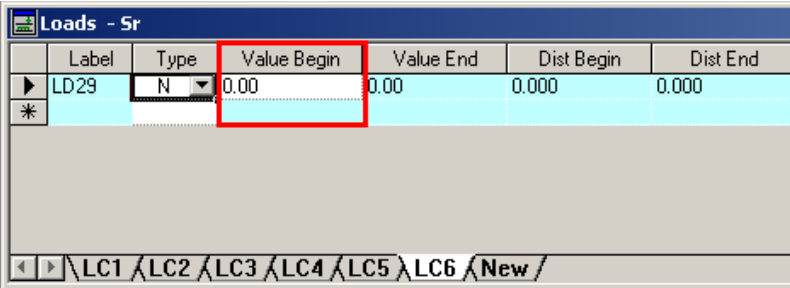
Label	Description	P.C.1	P.C.2	P.C.3	P.C.4
LC1	Vejas Fsup	1.00	1.00		
LC2	Vejas Finf			1.00	1.00
LC3	Sniegas Fsup	1.00		1.00	
LC4	Sniegas Finf		1.00		1.00
LC5	Naudinga (pastovi)	1.00	1.00	1.00	1.00
LC6	Sr	1.00	1.00	1.00	1.00

b)



Label	Type	Value Begin	Value End	Dist Begin	Dist End
LD1	N	2.60	0.00	0.000	0.000
LD2	N	1.30	0.00	0.000	0.000
LD3	N	2.92	0.00	0.000	0.000
LD4	N	1.35	0.00	0.000	0.000
LD5	N	1.00	0.00	0.000	0.000

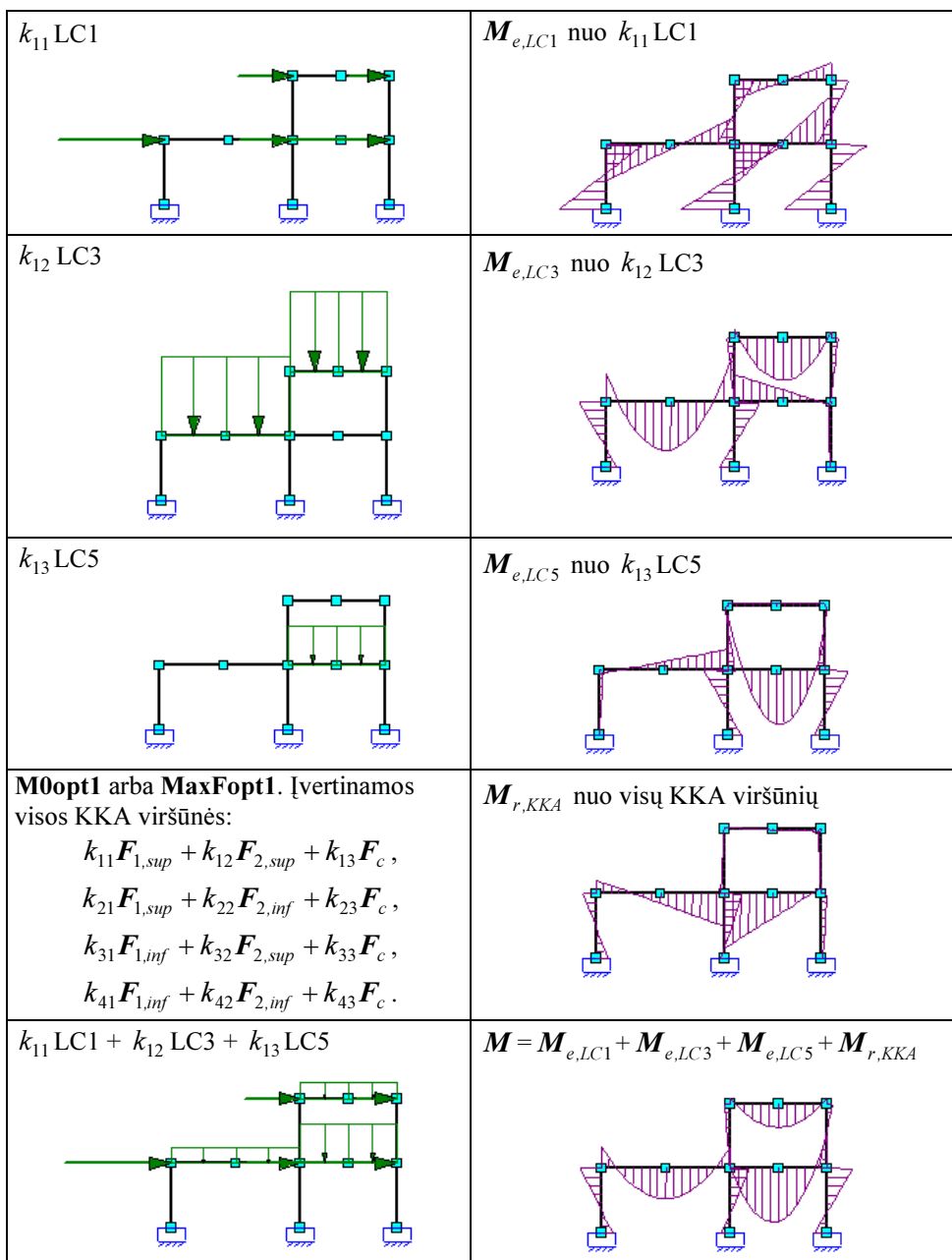
c)



Label	Type	Value Begin	Value End	Dist Begin	Dist End
LD29	N	0.00	0.00	0.000	0.000

3.6 pav. Apkrovų kombinacijų sudarymo principas MatrixFrame programoje

Fig. 3.6. The principle of load combination creation in MatrixFrame software

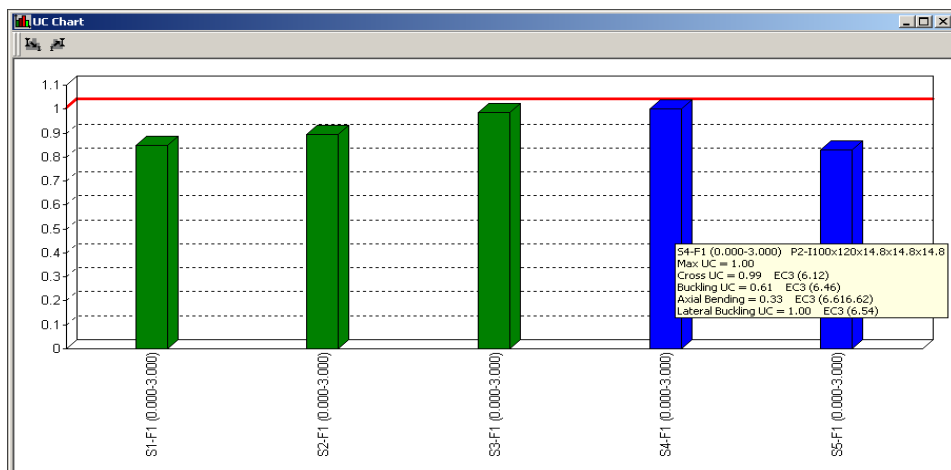


3.7 pav. Liekamųjų įrašų S_r integravimas į apkrovos derinį P.C.1

Fig. 3.7. Incorporatin of residual forces S_r into load combination P.C.1

Paveiksle 3.7 parodyta kaip yra sumuojami liekamieji momentai M_r apkrovos derinyje. Tokiu pat principu yra sumuojamos ir kitos liekamosios įrašos N_r , V_r bei liekamieji poslinkiai u_r .

Apskaičiavus sumines įrašas atliekamas konstrukcijos stiprumo klumpamosios galios patikra pagal projektavimo standartus t. y. tikrinama ar $UC_k \leq 1$ (3.8 pav.)



3.8 pav. Vienetines patikros UC grafas konstrukcijos elementams

Fig. 3.8. Unity check graph for elements of structure

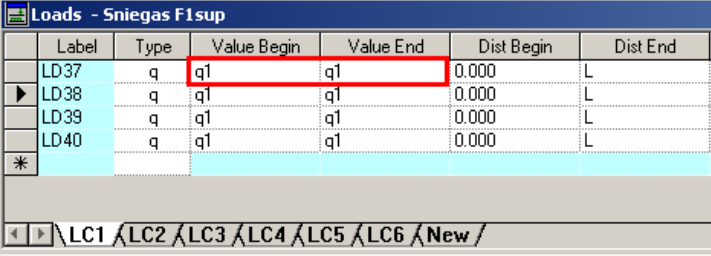
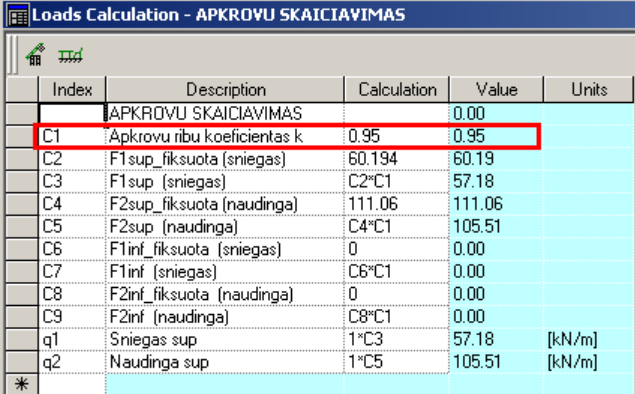
Jei $UC_k > 1$ nors vienam elementui k , tai priklausomai nuo sprendžiamo uždavinio tipo yra keičiami skerspjūvio parametrai (3.9 pav., projektinis uždavinys), arba keičiamos apkrovos ribos (3.10 pav., patikrinamasis uždavinys) tol kol pasiekama $UC_k \leq 1$ visiems elementams k . Projektinio uždavinio atveju, kai $UC_k \leq 1$ yra apskaičiuojami konstrukciniai apribojimai S_{min} ir S_{max} .

Sections									
	Shape	Tapered	hB	hE	t_f	t_w	t_{f2}	bB	bE
►	I-Shape		0.150	0.150	0.0220	0.0220	0.0220	0.150	0.00
	I-Shape		0.120	0.120	0.0148	0.0148	0.0148	0.100	0.00
	I-Shape		0.200	0.200	0.0302	0.0302	0.0302	0.150	0.00

3.9 pav. Skerspjūvio parametų keitimo lentelė MatrixFrame

Fig. 3.9. Cross-sectional parameters definition grid in MatrixFrame

Patikrinamojo uždavinio atveju apkrovos apkrovimuose užduodamos parametrizuotai (3.10 pav., a), o parametrai suskaičiuojami atskiroje lentelėje (3.10 pav., b). Tokiu būdu galima „išpūsti“ arba „sutraukti“ KKA kitimo sritį (3.1 pav.) pakeičiant vieno (galima ir kelių) parametrų reikšmes, tol kol bus gauta $UC_k \leq 1$ visiems elementams t. y. bus apskaičiuoti apribojimai F_{max} ir F_{min} .

a)	
b)	

3.10 pav. Parametrizuotos apkrova MatrixFrame

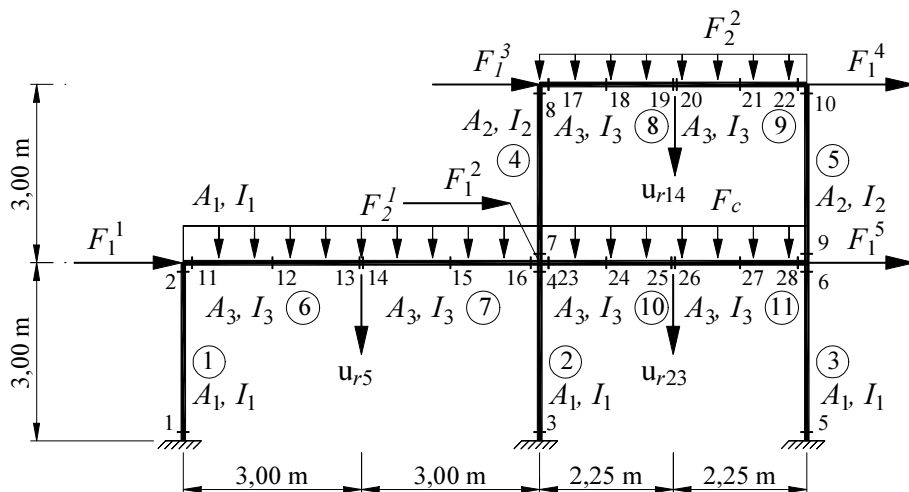
Fig. 3.10. Parametric loading in MatrixFrame

Plastinio būvio kintamųjų manai tarp programų realizuojami per tekstinį failą. Be abejo, yra galimybė mainus realizuoti per dinamiškai prijungiamą biblioteką (dll). Tobulintinas realizuotos sąsajos dalykas yra tai, kad tamprios įrašos yra skaičiuojamos tiek optimizavimo programose, tiek MatrixFrame lygiagrečiai, t. y. du kartus, kas nėra labai efektyvu. Tai sąlygota skirtingų baigtinių elementų naudojimo optimizavimo programose ir MatrixFrame. Pastarojoje programoje visi skaičiavimai realizuoti poslinkiniais baigtiniais elementais, o optimizavimo programose pusiausvyraisiais baigtiniais elementais. Tačiau autorius šioje disertacijoje siekė pademonstruoti programų integracijos galimybę, bei būdą, kaip įmanoma projektuoti prisitaikiusią konstrukciją standartų kontekste. Šis tikslas, autoriaus nuomone, buvo pasiektas.

Šiame poskyryje išnagrinėtas integracijos metodas svarbus ne tiek informacinių technologijų atžvilgiu, o tuo, kad įgalina įvertinti plastinį konstrukcijos darbą, kuris sąlygojamas apkrovos derinių (o ne vienos apkrovimo istorijos nagrinėjimo!), kurie aktualūs konstrukcijų projektavimui pagal standartų reikalavimus. Kaip žinoma, egzistuoja daug pramoninių kompiuterinių programų, puikiai gebančių įvertinti plastinį konstrukcijos darbą, bet tik nuo vieno apkrovimo. Be abejo, yra įmanoma analizuoti konstrukcijos plastinį darbą nuo keleto apkrovos derinių, skaičiuojant kiekvieno derinio poveikį ir galiausiai sudarant rezultatų gaubtinę. Tačiau ši gaubtinė nėra tapati tikram plastiniam konstrukcijos darbui, nes nuo vieno apkrovimo susidariusios plastinės deformacijos įtakoja kitų apkrovimų sąlygotą plastinę konstrukcijos elgseną.

3.4.6. Rėmo projektinio uždavinio pavyzdys

Pasiūlyta skaičiavimo technika yra iliustruojama dviejų aukštų rėmo (3.11 pav.) patikrinamojo uždavinio (3.1)–(3.5) sprendimu. Uždaviniui (3.1)–(3.5) spręsti naudota autoriaus sukurta kompiuterinė programa M0opt1, kurios pagrindas yra Rozeno projektuojamųjų gradientų metodas (Bazaraa *et al.* 2004). Klumpamosios galios įvertinimui naudojama kompiuterinė projektavimo programa MatrixFrame 4.1. Klumpamoji galia įvertinama pagal projektavimo standartą EN1993 (formulės (3.11)–(3.14)).

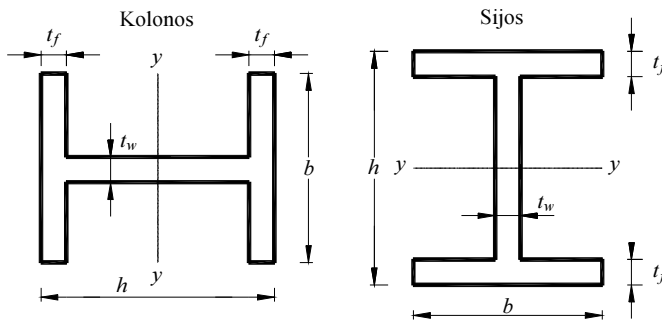


3.11 pav. Rėmo diskretizacija

Fig. 3.11. Discretized frame

Rėmas yra apkrautas dviem nepriklausomomis apkrovomis: horizontaliomis koncentruotomis apkrovomis $F_1 = [F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5]$ veikiančiomis rėmo mazguose ir vertikaliomis vienodai paskirstytomis $F_2 = [F_2^1, F_2^2]$ veikiančiomis stogo sijas 6, 7, 8 ir 9 (3.11 pav.). Pastovi apkrova F_c veikia grindų sijas 10 ir 11. Apkrovų kitimo ribos užrašomos nelygybėmis $F_{1,inf} \leq F_1 \leq F_{1,sup}$, $F_{2,inf} \leq F_2 \leq F_{2,sup}$, kur $F_{1,inf} = \{-9,75, -4,9, -5, -6,75, -19,5\}$ kN, $F_{1,sup} = \{13,6,5,6,75,5,14,6\}$ kN, $F_{2,inf} = \{0,0\}$, $F_{2,sup} = \{48,48\}$ kN/m ir $F_c = 117 \cdot \text{kN/m}$.

Rėmas pagamintas iš plieno, kurio tamprumo modulis $E = 210 \text{ GPa}$ ir takumo riba $\sigma_y = 235 \text{ MPa}$. Rėmo kolonų, stogo ir grindų sijų skerspjūviai parodyti 3.12 pav.



3.12 pav. Rėmo kolonų ir sijų skerspjūviai

Fig. 3.12. Cross-sectional shapes for frame columns and beams

Skerspjūvių parametrai b ir h tolydaus optimizavimo metu nekinta, keičiamas tik lentynos ir sienutės storis $t = t_f = t_w$. Skerspjūvio dydžiai b ir h parodyti 3.3 lentelėje. Diskretinio optimizavimo metu skerspjūviai parenkami iš skerspjūvių gamintojų pateiktų sortamentų.

Ribinės skerspjūvio įrašos kai $t = t_f = t_w$ apskaičiuojamos pagal formules

$$M_0 = \sigma_y W_{pl,y} = \sigma_y \left(t^3 - (b+h)t^2 + \left(\frac{h^2}{4} + bh \right) t \right),$$

$$N_0 = \sigma_y A = \sigma_y (2bt + t(h-2t)).$$

3.3 lentelė. Skerspjūvių parametrų reikšmės**Table 3.3.** Values of cross-sections

Elementai $k, k \in K$	$b,$ m	$h,$ m
1, 2, 3	0,15	0,15
4, 5	0,1	0,12
6, 7, 8, 9, 10, 11	0,15	0,2

Pagrindinė užduotis yra nustatyti prisitaikiusio rėmo minimalų tūrį (3.11 pav.) kai diskretizuoto rėmo vidinių jėgų vektorius $S = (M, N)^T = (M_1, M_2, M_3, \dots, M_{28}, N_1, N_2, \dots, N_{11})^T = (S_i)^T$, $i = 1, 2, \dots, n = 39$, kuriame yra įvertinti ir lenkimo momentai M , ir ašinės jėgos N . Šiuo atveju rėmo projektinis uždavinys sprendžiamas pagal matematinį modelį (3.1)–(3.5). Nežinomieji yra kolonų ir sijų skerspjūvio plotai A_k , $k \in K$ ir plastinių daugiklių vektoriai λ_j , $j = 1, 2, \dots, 4$. Buvo nagrinėti penki skaičiavimo variantai:

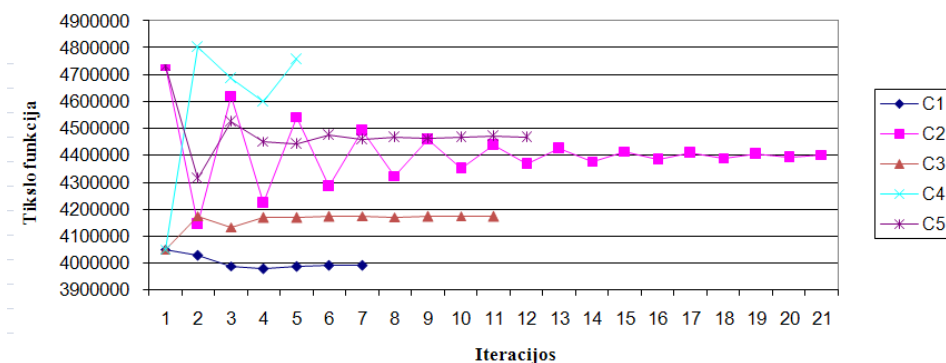
- Atvejis C1.** Įvertintos tik stiprumo sąlygos (3.2). Tolydus optimizavimas;
- Atvejis C2.** Įvertintos tik stiprumo (3.2) ir standumo sąlygos (3.5). Užsiduoti poslinkių apribojimai: $-\infty \leq u_5 \leq 0,03 \text{ m}$, $-\infty \leq u_{14} \leq 0,0225 \text{ m}$, $-\infty \leq u_{23} \leq 0,0225 \text{ m}$ (3.2 pav.). Tolydus optimizavimas;
- Atvejis C3.** Įvertintos tik stiprumo (3.2) ir klumpamosios galios (konstruktyvinių apribojimų) (3.4) sąlygos. Tolydus optimizavimas;
- Atvejis C4.** Įvertintos tik stiprumo (3.2) ir klumpamosios galios (3.4) sąlygos. Diskretinis optimizavimas;
- Atvejis C5.** Įvertintos visos (stiprumo (3.2), standumo (3.5) ir klumpamosios galios (3.4.) sąlygos). Užsiduoti poslinkių apribojimai: $-\infty \leq u_5 \leq 0,03 \text{ m}$, $-\infty \leq u_{14} \leq 0,0225 \text{ m}$, $-\infty \leq u_{23} \leq 0,0225 \text{ m}$ (3.2 pav.). Tolydus optimizavimas.

Skaičiavimai C1 ir C2 atvejams buvo atlikti su programa M0opt1, o atvejai C3–C5 skaičiuoti integruotai panaudojant M0opt1 ir MatrixFrame programas, pagal iteracijas aprašytas 3.4.4 poskyryje ir 3.4 paveiksle. Visų paminėtų skaičiavimo atvejų rezultatai, priklausomai nuo pritaikytų apribojimų, parodyti 3.4 lentelėje.

3.4 lentelė. Projektinio uždavinio skaičiavimo rezultatai**Table 3.4.** Calculated results for the design problem

Atvejis	M_{01} , Nm	M_{02} , Nm	M_{03} , Nm	Tikslo funkcija (TF)	Tūris, m^3	Plastinių deformacijų vieta
C1	75441	41673	204168	3991522	0,26149777	6, 2, 23
C2	93970	34942	223206	4403462	0,292369813	23
C3	120537	48302	186579	4173339	0,283231289	23
C4	174986	57610	189018	4755802	0,350856685	23
C5	108090	44151	215258	4466587	0,300776204	23

Skaičiavimo atvejais C2 ir C5 suminis poslinkis u_{23} pasiekė viršutinę poslinkio apribojimo ribą $u_{max} = 0,0225m$. Diskretinio optimizavimo atveju C4 ribinius momentus $M_{01} = 174986Nm$, $M_{02} = 57610Nm$ ir $M_{03} = 189018Nm$ atitinka skerspjūviai iš sortamento HE240, HE160 ir IPE330. Pažymėtina, jog tokie pat diskretiniai skerspjūviai buvo gauti ketvirtojoje ir penktojoje iteracijoje, todėl optimizavimo procesas buvo sustabdytas ir priimta, jog gautas optimalus sprendinys. Diskretinis optimizavimas yra labai svarbus statybinių konstrukcijų projektavime, tačiau ir tolydinis optimizavimas (atvejai C1-C3, C5) gali būti įvadinis žingsnis į diskretinį optimizavimą. Pavyzdžiui, naudojant skerspjūvių, gautų tolydinio optimizavimo metu, charakteristikas galima parinkti artimiausią pagal charakteristikas diskretinį skerspjūvį. Pagrindinio optimizavimo uždavinio optimalaus sprendinio kriterijus yra tikslo funkcijos konvergavimas norimu tikslumu. Optimizavimo uždavinio tikslo funkcijos konvergavimas visiems atvejams parodytas 3.13. pav.

**3.13 pav.** Optimizavimo uždavinio tikslo funkcijos konvergavimas**Fig. 3.13.** Convergence of the optimization-problem objective function

C2 atveju konvergavimo dydis yra lygus $\delta = 0,25\%$, iteratyvinis procesas parodytas 3.5 lentelėje.

3.5 lentelė. Optimizavimo uždavinio tikslo funkcijos konvergavimas C2 atveju

Table 3.5. Convergence of the optimization-problem objective function for case C2

Iteracija	M_{01} , Nm	M_{02} , Nm	M_{03} , Nm	TF	δ TF %
1	96888	42400	240460	4733292	
2	93807	37591	204883	4143051	12,47
3	95221	37257	236064	4621487	-11,55
4	93755	35439	211158	4223807	8,61
5	94299	35814	231966	4543060	-7,56
6	93670	34931	215459	4284503	5,69
7	94140	35320	228876	4492323	-4,85
8	93767	34832	218090	4324254	3,74
9	94083	35129	226802	4459547	-3,13
10	93840	34837	219776	4350228	2,45
11	94044	35043	225444	4438312	-2,02
12	93885	34860	220870	4367176	1,60
13	94016	34999	224559	4424527	-1,31
14	93912	34882	221583	4378244	1,05
15	93997	34973	223983	4415558	-0,85
16	93929	34898	222047	4385447	0,68
17	93984	34958	223609	4409735	-0,55
18	93939	34909	222348	4390121	0,44
19	93975	34948	223365	4405942	-0,36
20	93946	34916	222545	4393195	0,29
21	93970	34942	223206	4403462	-0,23

3.4.7. Rėmo apkrovos optimizavimo uždavinio pavyzdys

Pasiūlyta skaičiavimo technika yra iliustruojama dviejų aukštų rėmo (3.11 pav.) projektinio uždavinio (3.6)(3.10) sprendimu. Uždaviniui (3.6)(3.10) spręsti naudota autoriaus sukurta kompiuterinė programa MaxFopt1, kurios pagrindas yra Rozeno projektuojamųjų gradientų metodas (Bazaraa *et al.* 2004). Klumpamosios galios įvertinimui naudojama kompiuterinė projektavimo programa MatrixFrame 4.1. Klumpamoji galia įvertinama pagal projektavimo standartą

NEN6771. Rėmas pagamintas iš plieno, kurio tamprumo modulis $E = 210$ GPa ir takumo riba $\sigma_y = 235$ MPa. Rėmo kolonų, stogo ir grindų sijų skerspjūviai parodyti 3.6 lentelėje. Skerspjūvių dimensijos lieka nepakitę viso optimizavimo proceso metu.

3.6 lentelė. Skerspjūvių dimensijos

Table 3.6. Values of cross-sections

Elementai $k, k \in K$	b , m	h , m	t , m	A_k , m ²	M_{0k} , Nm	N_{0k} , N
1, 2, 3	0,15	0,15	0,016	0,006688	88665	1571680
4, 5	0,1	0,12	0,01	0,003000	31725	705000
6, 7, 8, 9, 10, 11	0,15	0,2	0,03	0,013200	21432	3102000

Rėmas apkrautas dvejomis nepriklausomomis apkrovomis: horizontaliomis koncentruotomis jėgomis $F_1 = \{F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5\}$ veikiančiomis rėmo mazgoose ir vertikalėmis vienodai paskirstytomis jėgomis $F_2 = \{F_2^1, F_2^2\}$ veikiančiomis stogo sijas (6, 7, 8, 9). Pastovi apkrova $F_c = 117$ kN/m veikia grindų sijas (10, 11). Apkrovos kitimo ribos yra užrašytos nelygybėmis $F_{1,inf} \leq F_1 \leq F_{1,sup}$, $F_{2,inf} \leq F_2 \leq F_{2,sup}$, jos yra optimizavimo uždavinio nežinomieji. Pagrindinis tikslas yra prisitaikiusio rėmo (3.11 pav.) apkrovų kitimo ribų radimas kai vidinių diskretizuoto rėmo jėgų vektorius yra $S = (M, N)^T = (M_1, M_2, M_3, \dots, M_{28}, N_1, N_2, \dots, N_{11})^T = (S_i)^T$, $i = 1, 2, \dots, n = 39$, kuriame yra įvertinti lenkimo momentai M ir ašinės jėgos N . Šiuo atveju rėmo projektinis uždavinys sprendžiamas pagal matematinį modelį (3.6)–(3.10). Nežinomieji yra apkrovos kitimo ribos $F_{1,inf}$, $F_{2,inf}$, $F_{1,sup}$ ir $F_{2,sup}$, bei ir plastinių daugiklių vektoriai λ_j , $j = 1, 2, \dots, 4$. Uždavinys (3.6)–(3.10) spęstas pagal iteracijas aprašytas 3.4.4 poskyryje, buvo nagrinėti trys skaičiavimo atvejai:

Atvejis C1. Įvertintos tik stiprumo sąlygos (3.7);

Atvejis C2. Įvertintos tik stiprumo (3.7) ir standumo sąlygos (3.10). Užsi-
duoti poslinkių apribojimai: $-\infty \leq u_5 \leq 0,03$ m,
 $-\infty \leq u_{14} \leq 0,0225$ m, $-\infty \leq u_{23} \leq 0,0225$ m (3.11 pav.);

Atvejis C3. Įvertintos tik stiprumo (3.7) ir klumpamosios galios (konstruktyvinių apribojimų) (3.9) sąlygos;

Skaičiavimai C1 ir C2 atvejams buvo atlikti su programa MaxFopt1, o atvejis C3 skaičiuotas integruotai panaudojant MaxFopt1 ir MatrixFrame programas, pagal iteracijas aprašytas 3.4.4 poskyryje ir 3.5 paveiksle. Visų paminėtų skaičiavimo atvejų rezultatai, priklausomai nuo pritaikytų apribojimų, parodyti 3.7 lentelėje.

3.7 lentelė. Apkrovos optimizavimo uždavinio skaičiavimo rezultatai

Table 3.7. Calculated results for the load-optimization problem

Atvejis	$F_{1,sup}$, N	$F_{2,sup}$, N/m	$F_{1,inf}$, N	$F_{2,inf}$, N/m	TF	Plastinių deformacijų vieta
C1	23679	44035	-29349	-10	97073	4, 6, 8, 23
C2	15777	26006	-23958	-10	65751	4, 6
C3	11839	19200	-14673	-10	45722	4

Skaičiavimo atveju C2 suminis poslinkis u_{23} pasiekė viršutinę poslinkio apribojimo ribą $u_{max} = 0,0225m$. Iteratyvinis skaičiavimo procesas buvo atliekamas tik atvejui C3, o kitais atvejais optimalus sprendinys buvo gautas pirmojoje iteracijoje, nes skaičiavimas buvo vykdomas tik su programa MaxFopt1 (klumpamoji galia su MatrixFrame programa nebuvo skaičiuota), bei standumo matrica K viso optimizavimo metu nekito (skirtingai nei projektiniame uždavinyje). Šiame pavyzdyje matyti, jog klumpamosios galios įvertinimas turi didelę įtaką tikslo funkcijos (TF) reikšmei. C3 skaičiavimo atveju TF yra mažiausia. TF reikšmės skirtumas tarp C3 ir C2 yra 44%, o tarp C3 ir C1 – 112%.

3.5. Trečiojo skyriaus išvados

1. Prisitaikančių konstrukcijų optimalaus projektavimo metodikos praktinis įdiegimas turi būti grindžiamas ne tik teoriniais patobulinimais, sukurtais naujais matematiniais modeliais, bet ir glaudžia sąsaja su egzistuojančiais konstrukcijų projektavimo paketais. Tuo būdu įmanoma išvengti itin teoretizuotų konstrukcijų optimizavimo metodų atotrūkio nuo realaus, pagrįsto normatyviniais dokumentais projektavimo.

2. Sudarytų pagrindinių optimizavimo uždavinių su stiprumo, standumo ir klumpamosios galios apribojimais sprendimo dalis, liečianti klumpamąją galią, yra perkeliama projektavimo programai su įdiegtais projektavimo standartais.
3. Sprendimo procesas tampa išimtinai tik iteracinis.
4. Projektavimo programos išeities duomenimis tampa ir optimizavimo uždavinio sprendimo metu gautos liekamosios įrašos ir poslinkiai, t. y. atsižvelgiama į plastinių deformacijų įtaką.
5. Siūlomi optimizavimo uždavinių sprendimo būdai leidžia realizuoti ir diskretinio optimizavimo principus. Tokiu būdu prisitaikomumo teorija tampa apibendrinančiu įrankiu vykdant tamprių-plastinių konstrukcijų skaičiavimą ir optimizavimą įvairių apkrovų atvejais.
6. Sukurta metodika leidžianti statybos inžinerijos praktikoje sutinkamą judamos ar vienkartinės apkrovos tipą ir apkrovos derinius interpretuoti kaip KKA atvejį.

Sukurtoji programinė įranga

Matematinio programavimo teorija, plačiai paplitusi kaip ekstreminių uždavinių sprendimo metodas, talkina prisitaikomumo teorijos optimizavimo uždavinių nagrinėjimui nuo jų matematinių modelių sudarymo iki skaitinio sprendinio rezultatų. Disertacijoje uždaviniai spęsti taikant Rozeno projektuojamųjų gradientų metodą. Būtent Rozeno projektuojamųjų gradientų metodo praktinei programinei realizacijai ir skirtas šis skyrius. Jame aptariami netiesinio programavimo taikymo ypatumai, bei Rozeno algoritmo pagrindu autoriaus sukurtos netiesinio optimizavimo programos M0opt1 bei MaxFopt1.

Skyriaus tematika paskelbtas vienas autoriaus straipsnis (Atkočiūnas *et al.* 2007b).

4.1. Rozeno projektuojamųjų gradientų algoritmas

Netiesinio programavimo Rozeno projektuojamųjų gradientų algoritmas yra pakankamai universalus (Bazaraa *et al.* 2004; Čyras ir Atkočiūnas 1984; Atkočiūnas 1994, Čyras *et al.* 2004). Jį galima taikyti, kai tikslo funkcija, apribojimai yra tiesiniai arba netiesiniai. Projektiniame (3.1)–(3.5) ir patikrinamajame (3.6)–(3.10) uždaviniuose tikslo funkcija ir apribojimai yra tiesiniai, todėl toliau bus iliustruojamas Rozeno algoritmo taikymas šiam atvejui. Bendrai tiesinio programavimo iškilas uždavinys užrašomas:

rasti

$$\max \mathcal{F}(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

kai

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad i \in I. \quad (4.2)$$

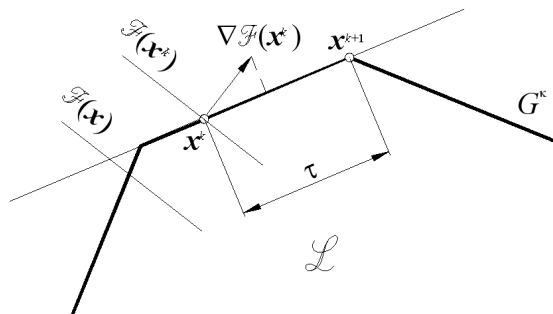
Kadangi funkcija $\varphi_i(\mathbf{x})$ – tiesinė, tai jos gradientas $\nabla \varphi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i$; čia $\mathbf{a}_i$ – n -matis koeficientų prie nežinomųjų vektorius-stulpelis. Tiesinių apribojimų (4.2) atveju aktyvinių apribojimų gradientų matrica žymima $\mathbf{A}_\kappa$ t. y.,

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_\kappa = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_i \ \dots \ \mathbf{a}_\kappa]. \quad (4.3)$$

Čia $\mathbf{A}_\kappa$ – $(n \times \kappa)$ – matė matrica, kur n – Euklido erdvės E^n matas, o κ – aktyvinių apribojimų skaičius. Aktyviniais vadinami tokie apribojimai, kurie tenkinami kaip lygybės ($\varphi_i(\mathbf{x}^k) = 0, \quad i \in I.$). Vektoriai iš n -matės erdvės, tenkinantys (4.2) sąlygas kaip lygybes, sudaro $(n \times \kappa)$ -matį darinį, žymimą $\mathbf{G}^\kappa$. Judėjimas iš Euklido erdvės E^n taško $\mathbf{x}^k$ vyksta vektoriaus $\mathbf{P}_\kappa \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k)$, apskaičiuoto pagal formulę:

$$\mathbf{P}_\kappa \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k) = (\mathbf{I} - \nabla \Phi(\mathbf{x}^k) \mathbf{V}_\kappa(\mathbf{x}^k) \nabla \Phi^T(\mathbf{x}^k)) \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k) \quad (4.4)$$

kryptimi (4.1 pav.). $\mathbf{I} - (n \times n)$ -matė vienetinė matrica, $\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k)$ – tikslo funkcijos gradientas, o $(\kappa \times \kappa)$ -matė matrica $\mathbf{V}_\kappa(\mathbf{x}^k)$ išreiškiama taip: $\mathbf{V}_\kappa(\mathbf{x}^k) = (\nabla \Phi^T(\mathbf{x}^k) \nabla \Phi(\mathbf{x}^k))^{-1}$. $\mathbf{P}_\kappa$ – projektyvinė matrica. Taip randamas vektorius $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \tau' \mathbf{P}_\kappa \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k)$, čia eilinės iteracijos ėjimo žingsnis $\tau' = \min\{\tau' | \tau' > 0, i = \kappa + 1, \kappa + 2, \dots, l\}$. Tik tokiu atveju vektorius $\mathbf{x}^{k+1}$ „neišeina“ iš leistinosios srities $\mathcal{L} = \{\mathbf{x} | \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l\}$. Jeigu leistinojo intervalo viduje $0 < \tau < \tau'$ nėra tokio vektoriaus, kuriam tikslo funkcijos reikšmė būtų didesnė, negu taške $\mathbf{x}^{k+1}$, laikoma, kad $\tilde{\mathbf{x}}^{k+1} = \mathbf{x}^{k+1}$ ir skaičiavimo procesas tęsiamas. Jeigu $\nabla \mathcal{F}^T(\mathbf{x}^k) \mathbf{P}_\kappa \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^{k+1}) < 0$, tai tikslo funkcija pasiekia savo maksimumą spindulyje tarp taškų $\mathbf{x}^k$ ir $\mathbf{x}^{k+1}$.



4.1 pav. Rozeno algoritmas, esant tiesiniams apribojimams

Fig. 4.1. Rozen algorithm in case of linear constraints

Taip apskaičiuojamas naujas žingsnis:

$$\tau'' = \tau' \frac{\nabla \mathcal{F}^T(\mathbf{x}^k) \mathbf{P}_\kappa \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k)}{\nabla \mathcal{F}^T(\mathbf{x}^k) \mathbf{P}_\kappa \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k) - \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k) \mathbf{P}_\kappa \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^{k+1})}. \quad (4.5)$$

Šiuo atveju $\mathbf{x}^{k+1}$ randamas pagal formulę: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \tau'' \mathbf{P}_\kappa \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}^k)$. Vektorius $\mathbf{x}$ laikomas sprendiniu, jeigu tenkinamos sąlygos:

$$\mathbf{P}_\kappa \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{V}_x(\mathbf{x}) \nabla \Phi^T(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

Norint mechanškai teisingai interpretuoti sąlygas (4.6), tenka pasinaudoti Kuno ir Takerio sąlygomis (Bazaraa *et al.* 2004). Taip pasielgta darbe (Храптович ir Аткичюнас 2001), kuriame parodyta, kad lygtis (4.6) yra deformacijų darnos lygtis, o kairioji nelygybės (4.7) pusė, paimta absoliutiniu dydžiu yra plastinių daugiklių vektorius λ :

$$\lambda = \left| \mathbf{V}_x(\mathbf{x}) \nabla \Phi^T(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}) \right|. \quad (4.8)$$

4.2. Rozeno algoritmo valdymo specifika ir patirtis

Kompiuterinėje algoritmo realizacijoje yra naudojamos valdymo konstantos, kuriomis yra nusakomas algoritmo veikimas bei sprendinio $\mathbf{x}^*$ (optimalaus vektoriaus) konvergavimo kriterijai. Nuo šių konstantų parinkimo priklauso ar op-

timizavimo procesas bus sėkmingas ir kaip greitai t. y. per kiek iteracijų bus gautas optimalus sprendinys.

Algoritme naudojama aktyvių apribojimų sąvoka. Tai tokie apribojimai kurie tenkinami kaip lygybės.

$$\varphi_i(x) = 0. \quad (4.9)$$

Tačiau programavimo prasme apribojimo skaitinės reikšmės, kai naudojami slankiojo kablelio kintamieji, retai kada bus lygios nuliui ir dėl to algoritmas neveiks t. y. nebus rasta jokių aktyvių apribojimų netgi jei, pavyzdžiui, bandysime palyginti tokią reikšmę kaip $1e^{-30}$ su 0: $1e^{-30} \neq 0$. Nors jei apribojime naudojami dydžiai yra $1e^5 \div 1e^6$ eilės, pavyzdžiui ribiniai momentai, tai galima interpretuoti, kad aktyvaus apribojimo reikšmė lygi nuliui. Todėl yra naudojama teigiama konstanta δ (programų M0opt1 ir MaxFopt1 rezultatų failuose žymima **DELTA**, 4.2 pav.), kuri nusako kada galime laikyti apribojimus (4.9) aktyviais:

$$|\varphi_i(x)| \leq \delta. \quad (4.10)$$

Skaičiavimuose naudojamos δ reikšmės yra $1e^{-3} \div 1e^{-5}$ eilės dydžiai laikant, kad apribojimo (4.9) reikšmės artimos $1 \div 10$ eilės dydžiams (t. y. apribojimai yra normalizuoti). Konstanta δ yra viena iš svarbiausių Rozeno algoritmo valdymo konstantų. Nuo jos parinkimo priklauso sėkmingas optimizavimo procesas, todėl nesėkmingai vykstant optimizavimo procesui rekomenduotina pirmiausia keisti šios konstantos reikšmę ir pakartoti skaičiavimą.

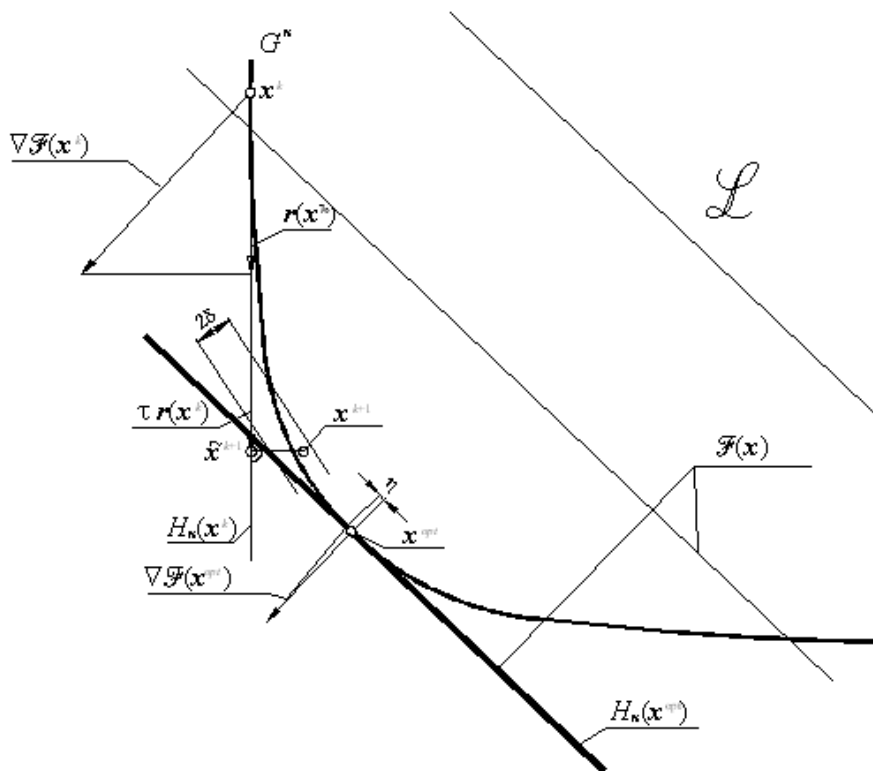
Rozeno algoritmo optimalumo (Kuno ir Takerio) sąlygos (4.6)–(4.7) taip pat yra lyginamos su nuliu. Todėl yra naudojamos konstantos η (**ETA**, 4.2 pav.) bei ε (**EPS**) ir sąlygos (4.6)–(4.7) perrašomos:

$$|P_k \nabla \mathcal{J}(x)| \leq \eta, \quad (4.11)$$

$$V_k(x) \nabla \Phi^T(x^k) \nabla \mathcal{J}(x) \leq \varepsilon. \quad (4.12)$$

Teigiamai konstantai η naudojami $1e^{-2} \div 1e^{-4}$ eilės reikšmės. Konstanta ε gali būti tiek teigiama tiek neigiama. Jos reikšmė $1e^{-2} \div 1e^{-4}$. Optimizavimo metu rezultatų faile yra išvedamos realios (faktinės) didžiausios sąlygų (4.11) bei (4.12) reikšmės, kurios atitinkamai žymimos **ETAF** ir **EPSF**. Pagal jas galima orientuotis kiek arti optimalaus sprendinio yra tam tikros iteracijos sprendinys x . Optimaliam sprendiniui turi būti $|\mathbf{ETAF}| \leq \eta$ ir $\mathbf{EPSF} \leq \varepsilon$. Jei matome, kad optimizavimo algoritmas nekonverguoja ir tikslo funkcijai pasiekus tam tikrą reikšmę niekaip neberandama optimalesnė reikšmė ir „algoritmas užsicsiklina“,

tai reikėtų atkreipti dėmesį į konstantas η ir ε , bei **ETAF** ir **EPSF**. Jei **ETAF** ir **EPSF** skiriasi nuo η ir ε , pavyzdžiui, $10 \div 20 \%$, tai vertėtų sustabdyti optimizavimo procesą ir priskyrus reikšmes $\eta = \mathbf{ETAF} + \mathbf{ETAF} \cdot 0,01$ ir/arba $\varepsilon = \mathbf{EPSF} + \mathbf{EPSF} \cdot 0,01$ pakartoti optimizavimo procesą.



4.2 pav. Rozeno algoritmas, δ ir η konstantų geometrinė interpretacija

Fig. 4.2. Rozen algorithm, geometrical interpretation for constants δ and η

Rozeno algoritmo ėjimo žingsnio $\tau > 0$ mažiausią reikšmę nusako teigiama konstanta **TMZ**. Ėjimo žingsnis gali pradėti neapibrėžtai mažėti baigiantis optimizavimo procesui t. y. arti optimalaus sprendinio. Tai gali nulemti per griežta (maža) konstantos η reikšmė. Ją reikėtų padidinti arba tarpini sprendinį priimti kaip optimalų. Jei padidinus reikšmę η uždavinys vis tiek nekonverguoja, reikė-

tų pakeisti kitas konstantas. Konstantos rekomenduotinos reikšmės yra $1e^{-4} \div 1e^{-5}$.

Teigiama konstanta **ALIET** nusako kiek optimizavimo proceso metu gali sumažėti (jei vykdoma maksimizacija) arba padidėti (jei vykdoma minimizacija) tikslo funkcijos $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ reikšmė. Nors Rozeno algoritmas garantuoja tik tikslo funkcijos didėjimą (kai vykdoma maksimizacija) arba tik mažėjimą (kai vykdoma minimizacija) viso optimizavimo metu, tačiau praktinėje algoritmo realizacijoje nesėkmingai parinkus naują tašką $\mathbf{x}^{k+1}$ tenka grįžti atgal „priešinga optimizavimui“ kryptimi ir tęsti optimizavimą. Grįžimo maksimalų dydį ir nusako konstanta **ALIET**, kurios rekomenduotina reikšmė yra $1e^{-4}$ eilės dydis.

Šalia anksčiau paminėtų Rozeno algoritmo konstantų naudojamos normalizuojančios konstantos C_{S_0} , C_λ , C_u ir C_F . Šių konstantų paskirtis normalizuoti (padaryti artimas vienetui) apribojimų reikšmes. Tai reikalinga tam, kad apribojimų reikšmės būtų vienos eilės dydis artimas vienetui, bei tam, kad būtų korektiška palyginimo operacija su konstanta δ . Prisitaikančių konstrukcijų projekcinio uždavinio matematinis modelis įvertinus valdymo ir normalizuojančias konstantas užrašomas:

rasti

$$\min \left(\mathbf{L}^T \mathbf{S}_0 + \lambda_j^T \boldsymbol{\varphi}_j \right), \quad (4.13)$$

kai

$$\boldsymbol{\varphi}_j = (C_{S_0} \mathbf{F}) \mathbf{S}_0 - \boldsymbol{\Phi} \left((C_\lambda \mathbf{G}) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej} + \mathbf{S}_{ec} \right) \geq \delta, \quad (4.14)$$

$$\lambda_j \geq \delta, \quad \boldsymbol{\lambda} = \sum_j \lambda_j, \quad j \in J, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{S}_{max} / C_{S_0} - \mathbf{S}_0 \geq \delta,$$

$$\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_{min} / C_{S_0} \geq \delta, \quad (4.16)$$

$$C_u \mathbf{u}_{max} - C_u \left((C_\lambda \mathbf{H}) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_{ec} \right) \geq \delta,$$

$$C_u \left((C_\lambda \mathbf{H}) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_{ec} \right) - C_u \mathbf{u}_{min} \geq \delta. \quad (4.17)$$

Patikrinamojo uždavinio matematinis modelis įvertinus visas konstantas užrašomas:

rasti

$$\max \left(\mathbf{T}_{sup}^T \mathbf{F}_{sup} - \mathbf{T}_{inf}^T \mathbf{F}_{inf} - \boldsymbol{\lambda}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j \right), \quad (4.18)$$

kai

$$\boldsymbol{\varphi}_j = (\mathbf{S}_0 - \boldsymbol{\Phi}((C_\lambda \mathbf{G})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej} + \mathbf{S}_{ec})) / C_F \geq \delta, \quad (4.19)$$

$$\lambda_j \geq \delta, \quad \boldsymbol{\lambda} = \sum_j \lambda_j, \quad j \in J, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F}_{sup} \geq \delta, \quad \mathbf{F}_{max} / C_F - \mathbf{F}_{sup} \geq \delta,$$

$$-\mathbf{F}_{inf} \geq \delta, \quad \mathbf{F}_{sup} - \mathbf{F}_{min} / C_F \geq \delta \quad (4.21)$$

$$C_u \mathbf{u}_{max} - C_u ((C_\lambda \mathbf{H})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_{ec}) \geq \delta,$$

$$C_u ((C_\lambda \mathbf{H})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_{ec}) - C_u \mathbf{u}_{min} \geq \delta. \quad (4.22)$$

Programų M0opt1 bei MaxFopt1 rezultatų failuose normalizuojančios konstantos C_{S0} , C_λ , C_u ir C_F žymimos atitinkamai **M0DAUG**, **LIAMDAUG**, **UDAUG** ir **FDAUG**.

Rašant netiesinio optimizavimo uždavinius realizuojančias programas vienas iš esminių programavimo etapų yra tikslo funkcijos ir gradientų formavimas. Paprogramės realizuojančios gradientų formavimą yra pateiktos prieduose A ir B.

4.3. Pradinių duomenų formavimas programai M0opt1

Pirma konstantų grupė (sveikojo tipo skaičiai):

IEIL – rėmo diskretinio modelio laisvumo laipsnis (nustato visos diskretinės sistemos pusiausvyros lygčių skaičių);

MM – įrašų, esančių nagrinėjamo rėmo diskretinio modelio pusiausvyros lygtyse, skaičius t. y. pusiausvyros lygčių koeficientų matricos $\mathbf{A}$ stulpelių skaičius;

ITASK – diskretinio modelio skaičiuojamųjų pjūvių skaičius;

MOMSIZE – lenkimo momentų M , esančių nagrinėjamo rėmo diskretinio modelio pusiausvyros lygtyse, skaičius;

FSIZE – apkrovų skaičius;

XM0SIZE – optimizuojamų parametrų skaičius;

BSUMU – 0 jeigu įvertinami tik liekamieji momentai, bet koks skaičius jei įvertinami suminiai poslinkiai t. y. jei apribojami suminiai poslinkiai (liekamieji + tamprūs);

BDSEP – 0 jeigu matrica **D** įvedama pradiniam duomenų faile, bet koks skaičius jei įvedama atskirame duomenų faile.

Antra konstantų grupė (Rozeno algoritmo valdymo konstantos; realiojo tipo skaičiai; Karkauskas et al., 1995, lentelė 4.5):

EPS – skaičius parodantis kada plastines deformacijas galime laikyti lygias nuliui;

DELTA – skaičius parodantis kada takumo sąlygos – nelygybės laikomos lygybėmis;

ETA – optimalaus taško maksimali tikslo funkcijos gradiento projekcijos reikšmė;

TMZ – minimaliausia žingsnio τ reikšmė;

ALIET – skaičius nusakantis kiek maksimaliai gali sumažėti tikslo funkcija;

Normalizuojančios konstantos:

LIAMDAUG – daugiklius λ_i normalizuojanti konstanta. Rekomenduotinas 0,01 eilės dydis.

UDAUG – liekamuosius poslinkius u_r normalizuojanti konstanta. Jei yra tikėtinai centimetrų eilės dydžiai, tai šiai konstantai rekomenduotinos reikšmės 10–30

M0DAUG – ribinį momentą M_0 normalizuojanti konstanta. Rekomenduotinos reikšmės 100–300.

Pastaba: visos konstantos, išskyrus EPS turi būti tik teigiamos. EPS gali būti ir neigiama.

Matricos ir vektoriai.

Matricos įvedamos stulpeliais, visų įvedamų dydžių dimensijos turi būti N ir m.

A(IEIL,MM) – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica;

D(MM,MM) – pasiduodamumo matrica;

XSV(XM0SIZE) – optimalumo kriterijaus svorio koeficientų vektorius;

M0RIB(XM0SIZE*2) – optimalumo kriterijaus ribiniu reikšmių vektorius;

AK1(ITASK, XM0SIZE) – M_0 konfigūracijos matrica, kuri parodo kuriame konstrukcijos pjūvyje, kuris ribinis momentas veikia;

FSUPFINF(IEIL, FSIZE*2) – apkrovų ribų matrica;

CK(MM) – ribinių momentų ir ribinių ašinių jėgų santykių vektorius;

MNKFG(ITASK, 2) – pjūviuose veikiančių įrašų M ir N sąryšio matrica. Pirmame stulpelyje nurodomas pjūvyje veikiančio momento indeksas (matricos A atitinkanti tą momentą stulpelio indeksas), o antrame stulpelyje atitinkamai tame pjūvyje veikiančios ašinės jėgos indeksas.

USUMRIB(IEIL*2) – ribinių liekamųjų (arba suminių, jei $BSUMU$ nelygu 0) poslinkių reikšmių vektorius;

X(4*ITASK*IVIRS+XM0SIZE) – pradinis nežinomųjų vektorius;

PC(MM) – tamprios įrašos nuo pastovios apkrovos (jei $BSUMU=0$ įvedami nuliai);

UEPC(IEIL) – tamprūs poslinkiai nuo pastovios apkrovos (jei $BSUMU=0$ įvedami nuliai);

Sveikojo tipo skaičių matrica yra MNKFG, likusios – realiojo tipo.

4.4. Pradinių duomenų formavimas programai MaxFopt1

Pirma konstantų grupė (sveikojo tipo skaičiai):

IEIL – rėmo diskretinio modelio laisvumo laipsnis (nustato visos diskretinės sistemos pusiausvyros lygčių skaičių);

MM – įrašų, esančių nagrinėjamo rėmo diskretinio modelio pusiausvyros lygtyse, skaičius t. y. pusiausvyros lygčių koeficientų matricos A stulpelių skaičius;

ITASK – diskretinio modelio skaičiuojamųjų pjūvių skaičius;

MOMSIZE – lenkimo momentų M , esančių nagrinėjamo rėmo diskretinio modelio pusiausvyros lygtyse, skaičius;

FSIZE – optimizuojamų apkrovų skaičius.

Antra konstantų grupė (Rozeno algoritmo valdymo konstantos; realiojo tipo skaičiai; Karkauskas et al., 1995, lentelė 4.5):

EPS – skaičius parodantis kada plastines deformacijas galime laikyti lygias nuliui;

DELTA – skaičius parodantis kada takumo sąlygos – nelygybės laikomos lygybėmis;

ETA – optimalaus taško maksimali tikslo funkcijos gradiento projekcijos reikšmė;

TMZ – minimaliausia žingsnio τ reikšmė;

ALIET – skaičius nusakantis kiek maksimaliai gali sumažėti tikslo funkcija;

Normalizuojančios konstantos:

LIAMDAUG – daugiklius λ_i normalizuojanti konstanta. Rekomenduotinas 0.01 eilės dydis.

UDAUG – liekamuosius poslinkius u_r normalizuojanti konstanta. Jei yra tikėtini centimetrų eilės dydžiai, tai šiai konstantai rekomenduotinos reikšmės 10–30

FDAUG – apkrovų ribas F_{sup} , F_{inf} normalizuojanti konstanta. Rekomenduotinos reikšmės 100–300

Pastaba: visos konstantos, išskyrus EPS turi būti tik teigiamos. EPS gali būti ir neigiamas.

Matricos ir vektoriai.

Matricos įvedamos stulpeliais, visų įvedamų dydžių dimensijos turi būti N ir m.

A(IEIL,MM) – pusiausvyros lygčių koeficientų matrica;

D(MM, MM) – pasiduodamumo matrica;

TFSV(FSIZE*2) – optimalumo kriterijaus svorio koeficientų vektorius;

FRIB(FSIZE*2) – optimalumo kriterijaus ribiniu reikšmių vektorius;

FKFG(FSIZE) – apkrovos konfigūracijos vektorius, kuris parodo kurias pusiausvyros lygčių eilutes atitinka optimizuojamos jėgos;

SRIB(MM) – ribiniu įrašų M_0 , N_0 vektorius;

MNKFG(ITASK, 2) – pjūviuose veikiančių įrašų M ir N sąryšio matrica. Pirmame stulpelyje nurodomas pjūvyje veikiančio momento indeksas (matricos A atitinkantį tą momentą stulpelio indeksas), o antrame stulpelyje atitinkamai tame pjūvyje veikiančios ašinės jėgos indeksas.

URRIB(IEIL*2) – ribinių liekamųjų poslinkių reikšmių vektorius;

X(4*ITASK*2^FSIZE +FSIZE*2) – pradinis nežinomųjų vektorius;

4.5. Ketvirtąjo skyriaus išvados

1. Sukurtų optimizavimo programų naudojimas turi žymių privalumų prieš analogiškas matematiniuose paketuose įdiegtas programas, nes pastarosios neleidžia pilnai valdyti optimizavimo proceso t. y. jos yra „juodosios dėžės“, bei negali realizuoti KKA apkrovos, kai pastaroji užduota tik kitimo ribomis.
2. Netiesinių optimizavimo programų skaičiavimo rezultatų tikslumas ir konvergavimas priklauso nuo užsiduotų valdymo konstantų. Tokių uždavinių sprendimas reikalauja patirties ir algoritmo valdymo įgūdžių.

Prisitaikančių tampriųjų-plastinių simetrinių plokščių apkrovos optimizavimas

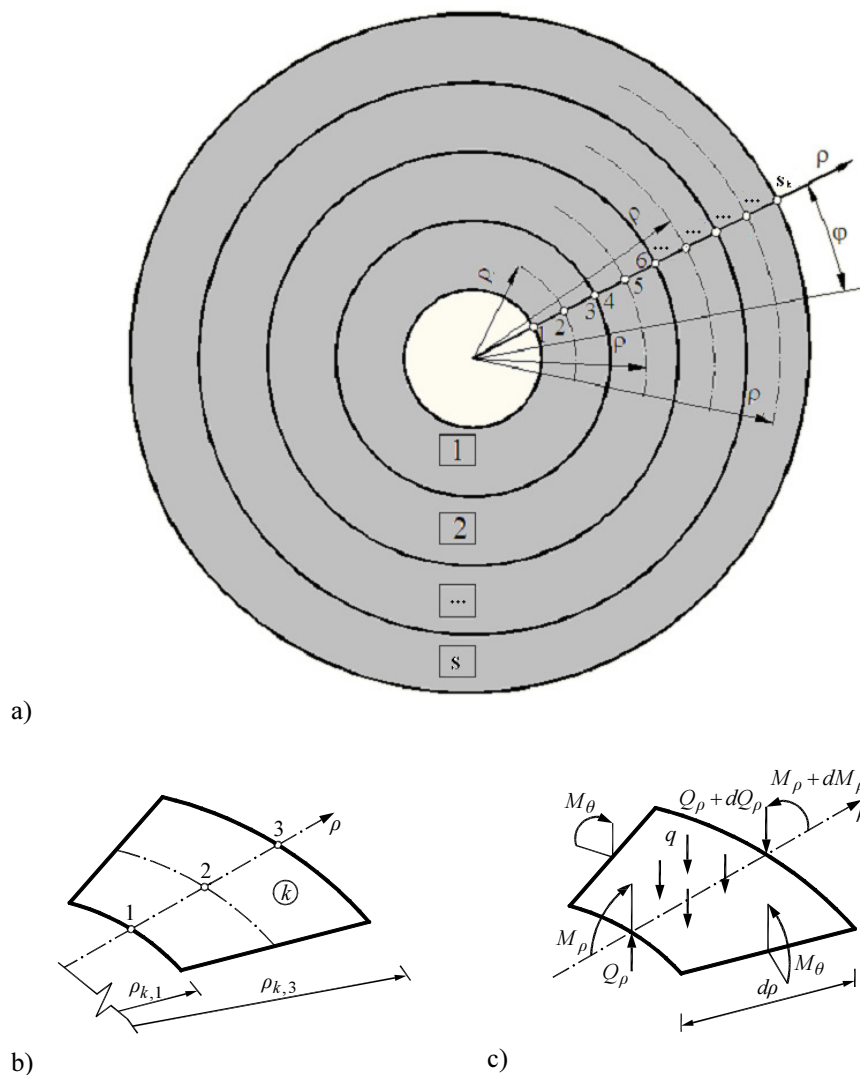
Skyriuje nagrinėjamas tamprios-plastinės simetrinės plokštės apkrautos KKA. patikrinamasis uždavinys. Pasiūlytas naujas Rozeno projektuojamųjų gradientų pagrindu suformuluotas patikrinamojo uždavinio sprendimo algoritmas kombinuojantys Mizeso ir Treska takumo sąlygas. Pasitelkiamos idealiai tampriai-plastinių konstrukcijų techniškosios skaičiavimo teorijos prielaidos (maži poslinkiai ir deformacijos).

Skyriaus tematika paskelbtas vienas autoriaus straipsnis (Venskus *et al.* 2010).

5.1. Diskretinės plokštės įrašos ir deformacijos

Polinėje koordinačių sistemoje $\mathbf{x} = (\rho, \theta)^T$ simetriškos apvalios plokštės (5.1 a pav.) diskretinis modelis gaunamas suskaidžius ją į $k=1, 2, \dots, s$ ($k \in K$) žiedinių baigtinių elementų su s_k mazginių taškų $l=1, 2, s_k=3$ ($l \in \mathcal{L}$) (1 ir 3 elemento mazgai yra pagrindiniai) (5.1 b pav.). Polinės koordinačių sistemos

pradžia yra plokštės centre. Užtenka ištirti tik vieną tokios plokštės spindulį, nes įrašos ir poslinkiai nepriklauso nuo koordinatės θ .



5.1 pav. Apvalios plokštės geometrija (a), baigtinis elementas (b) ir teigiamos įrašų kryptys (c)

Fig. 5.1. a) The geometry of a round plate; b) the finite element; c) the positive directions of internal forces

Todėl jų diskretizacijai naudojamas antros eilės žiedinis elementas (įrašos ap-
roksimuojamos antro laipsnio polinomais) su trimis mazginiais taškais, išdėsty-
tais viename spindulyje ρ . Baigtiniai elementai numeruojami išilgai spindulio
nuosekliai, pradedant nuo plokštės centro. Apkrova gali būti: paskirstyta baigti-
nio elemento paviršiuje, žiedu paskirstyta sutelktoji jėga. Medžiagos fiziniai pa-
rametrai (tamprumo modulis E ir Puasono koeficientas ν), plokštės storis t ir
paskirstytos apkrovos intensyvumas q baigtiniame elemente yra pastovūs.
Tampriose plastiškose plokštėse, taikant pusiausvirųjų baigtinių elementų meto-
dą (Belytschko 1972; Belytschko *et al.* 2000; Gallager 1975; Faccioli and Vitiello
1973; Kalanta 1995), ieškomos įrašų funkcijos gali turėti trūkių (ties pagrin-
diniais mazgais). Todėl kiekvienas baigtinis elementas turi „savo“ pagrindinius
mazgus, ir skaičiuojamieji pjūviai gali būti indeksuojami dvigubu indeksu kl
($k \in K, l \in \mathcal{L}$) arba bendru visiems plokštės diskretinio modelio skaičiuojamie-
siems pjūviams indeksu $i=1,2,\dots,\zeta=s \times v$ ($i \in I$). Elemento k momentų vektora-
rius yra:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k &= (M_{\rho,k1}, M_{\theta,k1}, M_{\rho,k2}, M_{\theta,k2}, M_{\rho,k3}, M_{\theta,k3})^T \\ &= (\mathbf{M}_{k1}, \mathbf{M}_{k2}, \mathbf{M}_{k3})^T = (\mathbf{M}_{kl})^T. \end{aligned} \quad (1)$$

Čia $\mathbf{M}_{kl} = (M_{\rho,kl}, M_{\theta,kl})^T$, indeksai ρ ir θ žymi radialinius ir žiedinius mo-
mentus, teigiamos jų kryptys pavaizduotos 5.1 c pav.

Lenkimo momentų aproksimacijos funkcijos, panaudojant k -jo elemento įrašų
aproksimacijos matricą $N_k(\rho)$, yra tokios:

$$\mathbf{M}_k(\rho) = N_k(\rho) \mathbf{M}_k. \quad (5.2)$$

Funkcijos (5.2) tokios, kad plokštės elemento pusiausvyros lygtis

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) M_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} M_\theta &= q \quad \text{arba} \\ \mathcal{M}(\rho) &= q \end{aligned} \quad (5.3)$$

nėra tapatybiškai tenkinama. Todėl diskretinio modelio pusiausvyra yra užtikri-
nama plokštės elementams ir pagrindiniams mazgams (Karkauskas 1994). Įra-
šius į lygtį (5.3) išraišką (5.2) ir atlikus diferencijavimo veiksmus gaunama al-
gebrinė baigtinio elemento pusiausvyros lygtis

$$\mathbf{A}_k(\rho)\mathbf{M}_k = \mathbf{q}_k, \quad (5.4)$$

čia

$$\mathbf{A}_k(\rho) = \mathcal{A}\mathbf{N}_k(\rho). \quad (5.5)$$

Paskiri elementai į sistemą jungiami, rašant pusiausvyros lygtis abiem pagrindiniams gretimų elementų mazgams. Taip užtikrinamas radialinių momentų M_ρ ir skersinių jėgų Q_ρ tolydinumas. Atsižvelgus ir į kraštinės sąlygas, plokštės m pusiausvyros lygčių sistema užrašoma taip:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{F} \text{ arba } \sum_k \mathbf{A}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{F}. \quad (5.6)$$

Taigi matricos $\mathbf{A}$ išmatavimai yra $(m \times n)$, $n = \zeta \times 2$. Plokštės diskretinio modelio geometrinės lygtys gaunamos, panaudojus įtempių galimųjų pokyčių principą:

$$\delta \mathbf{F}^T \mathbf{u} = \sum_k \int_{A_k} \delta \mathbf{M}_k^T(\rho) \mathcal{D} \mathbf{M}_k(\rho) dA. \quad (5.7)$$

Pasitelkus priklausomybes (5.2) ir lygtis (5.6), gauname

$$\sum_k \delta \mathbf{M}_k^T \mathbf{A}_k^T \mathbf{u} = \sum_k \delta \mathbf{M}_k^T \mathbf{D}_k \mathbf{M}_k. \quad (5.8)$$

Čia k -jo elemento simetrinė pasiduodamumo matrica $\mathbf{D}_k$ skaičiuojama pagal formulę:

$$[\mathbf{D}_k] = \int_{A_k} \mathbf{N}_k^T(\rho) \mathcal{D} \mathbf{N}_k(\rho) dA. \quad (5.9)$$

Taip gaunamos geometrinės lygtys paskiram baigtiniam elementui:

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{u} - \mathbf{D}_k \mathbf{M}_k = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

ir visam plokštės diskretiniam modeliui:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{D} \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Čia $\mathbf{D}$ – kvazidiagonalinė elementų pasiduodamumų matrica. Poslinkių vektoriaus $\mathbf{u}$ komponentų fizinę prasmę lemia pusiausvyros lygčių $\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{F}$ sudarymo sistema (eiliškumas).

Tegul plokštės deformavimosi perėjimą į plastinę stadiją reglamentuoja netiesinė Mizeso–Hubero plastiškumo sąlyga

$$M_{\rho}^2 - M_{\rho} M_{\Theta} + M_{\Theta}^2 \leq (M_0)^2. \quad (5.12)$$

Plastiškumo sąlyga tikrinama kiekviename baigtinio elemento mazginiame taške:

$$\mathbf{M}_{kl}^T \mathbf{\Pi}_{kl} \mathbf{M}_{kl} \leq (M_{0k})^2, \quad k \in K, \quad l \in \mathcal{L}. \quad (5.13)$$

Čia $\mathbf{\Pi}_{kl}$ – Mizeso–Hubero plastiškumo sąlygos matrica apvalios lenkiamos plokštės atveju:

$$\mathbf{\Pi}_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Plastiškumo sąlygos (5.13) dažnai perrašomos taip:

$$\varphi_{kl} = (M_{0k})^2 - \mathbf{M}_{kl}^T \mathbf{\Pi}_{kl} \mathbf{M}_{kl} \geq 0. \quad (5.15)$$

Plokštės ribinis lenkimo momentas elemento ribose pastovus: $M_{0k} = \text{const}$. Jeigu taikomos tiesinės Treska plastiškumo sąlygos, priklausomybė (5.15) užrašoma taip:

$$\varphi_{kl} = C_{kl} - \mathbf{\Phi}_{kl} \mathbf{M}_{kl} \geq 0. \quad (5.16)$$

Treska plastiškumo sąlygos matrica $\mathbf{\Phi}_{kl}$ yra tokia:

$$\mathbf{\Phi}_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Ribinių momentų reikšmių vektorius C_{kl} priderintas prie matricos $\mathbf{\Phi}_{kl}$. Pato- gumo dėlei ateityje skaičiuojamuosius pjūvius indeksuosime indeksu $i=1,2,\dots,\zeta$, $i \in I$.

5.2. Pagrindinės priklausomybės ciklinės apkrovos atveju

Inžinerijos praktikoje dažnai reikia žinoti plokštės, patyrusios plastinių deformavimą, bet nepasiekusios plastinio suirimo, įtempių ir deformacijų būvį (plokštės geometrija, ribiniai momentai M_0 ir apkrova F duoti) (Jankovski ir Atkočiūnas 2008). Toks statybinės mechanikos uždavinys paprastai vadinamas analizės uždaviniu (Čyras 1983). Šiuo atveju patogiu išskirti tampraus skaičiavimo momentus M_e ir liekamuosius M_r : $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{ei} + \mathbf{M}_{ri}$, $i \in I$. Tamprūs momentai gali būti skaičiuojami pagal formulę $\mathbf{M}_e = \alpha \mathbf{F}$. Čia $\alpha(n \times m)$ – momentų influentinė matrica. Kai apkrova $F(t)$ yra laiko t funkcija, turime:

$$\mathbf{M}_i(t) = \mathbf{M}_{ei}(t) + \mathbf{M}_{ri}, \quad i \in I \quad (5.18)$$

Jeigu KKA aprašoma tik savo kitimo ribomis F_{inf} , F_{sup} , galime nustatyti galimą apkrovos kombinacijų skaičių p ($j = 1, 2, \dots, p$; $j \in J$) ir (5.18) perrašyti taip:

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{M}_{ri}, \quad i \in I \quad (5.19)$$

Išsamiau apie $\mathbf{M}_{ei,j}$ nustatymą rašoma darbe (Pham 2003). Tuomet Mizeso–Hubero plastiškumo sąlyga (5.15) parašoma taip:

$$\varphi_{ij} = (M_{0k})^2 - \mathbf{M}_{kl}^T \mathbf{\Pi}_{kl} \mathbf{M}_{kl} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (5.20)$$

Taigi, prisitaikiusių konstrukcijų analizėje patogiu išskirti liekamuosius momentus $\mathbf{M}_r$, poslinkius $\mathbf{u}_r$ ir deformacijas $\boldsymbol{\theta}_r = \mathbf{D}\mathbf{M}_r + \boldsymbol{\theta}_p$. Tuomet pusiausvyros (5.6) ir geometrinės (5.11) lygtys šiais kintamaisiais užrašomos:

$$\mathbf{A}\mathbf{M}_r = \mathbf{0} \quad \text{arba} \quad \sum_k \mathbf{A}_k \mathbf{M}_{rk} = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

ir

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{D}\mathbf{M}_r + \boldsymbol{\theta}_p \quad (5.22)$$

Čia plastinių deformacijų vektoriaus $\boldsymbol{\theta}_p = (\theta_{p,i})$ komponentai yra skaičiuojami pagal formulę:

$$\theta_{p,i} = \sum_j [\nabla \varphi_{ij} (\mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{M}_{ri})]^T \lambda_{ij}, \quad \lambda_{ij} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (5.23)$$

Čia λ_{ij} – plastinių daugiklių vektorius, $\nabla \varphi_{ij}$ – plastiškumo sąlygų (5.20) gradientų matrica.

5.3. Analizės uždavinio matematiniai modeliai

Analizės uždavinio statinė formuluotė sudaroma pagal papildomos energijos minimumo principą ir Mizeso plastiškumo sąlygų atveju yra:

$$\min \frac{1}{2} \sum_k \mathbf{M}_{rk}^T \mathbf{D}_k \mathbf{M}_{rk}, \quad (5.24)$$

kai

$$\sum_k \mathbf{A}_k \mathbf{M}_{rk} = \mathbf{0}, k \in K, \quad (5.25)$$

$$\varphi_{ij} = (M_{0i})^2 - (\mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{M}_{ri})^T \mathbf{H}_i (\mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{M}_{ri}) \geq 0, i \in K, j \in J. \quad (5.26)$$

Optimalus uždavinio (5.24)–(5.26) sprendinys yra $\mathbf{M}_r^*$.

Analizės uždavinio kinematinės formuluotės matematinis modelis sudaromas pasitelkus matematinio programavimo dualumo teoriją ir yra:

rasti

$$\max \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{M}_{rk}^T \mathbf{D}_k \mathbf{M}_{rk} - \sum_i \sum_j \lambda_{ij} \nabla \varphi_{ij} \mathbf{M}_{ri} - \sum_i \sum_j \lambda_{ij} \left[(M_{0i})^2 - \mathbf{M}_{ij}^T \mathbf{H}_i \mathbf{M}_{ij} \right] \right\} \quad (5.27)$$

kai

$$\mathbf{D}_k \mathbf{M}_{rk} + \sum_j \nabla \varphi_{ij}^T \lambda_{kj} - \mathbf{A}_k^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (5.28)$$

$$\lambda_{kj} \geq 0, k \in K, i \in I, j \in J. \quad (5.29)$$

Kinematinės formuluotės (5.27)–(5.29) optimalus sprendinys yra $\mathbf{M}_r^*$, λ_{kj}^* , $\mathbf{u}_r^*$.

Treska plastiškumo sąlygų atveju keičiasi tik sąlygos (5.26), dabar jos būtų:

$$\varphi_{ij} = C_i - \Phi_i (M_{ei,j} + M_{ri}) \geq 0. \quad (5.30)$$

Vektorius C_i apjungia atitinkamo baigtinio elemento ribinius momentus.

5.4. Liekamųjų įlinkių ir momentų influentinės matricos

Jeigu analizės uždavinio statinės (5.24)–(5.26) ir kinematinės (5.27)–(5.29) formuluočių sprendinys nėra žinomas, jį galima rasti iš netiesinių lygčių sistemos:

$$AM_r = 0, \quad (5.31)$$

$$\varphi_{ij} = (M_{0k})^2 - M_{ij}^T \Pi_i M_{ij} \quad (5.32)$$

$$\lambda_{ij} [(M_{0k})^2 - M_{ij}^T \Pi_i M_{ij}] = 0, \quad \lambda_{ij} \geq 0, \quad (5.33)$$

$$DM_r + \sum_j \nabla \varphi_j^T \lambda_j - A^T u_r = 0, \quad (5.34)$$

$$\lambda_j \geq (\lambda_{ij}), \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (5.35)$$

Šią sistemą sudaro statinės formuluotės uždavinio (5.24)–(5.26) apribojimai ir Kuno ir Takerio sąlygos (Bazaraa *et al.* 2004). Kai žinomos plastinės deformacijos θ_p^* , iš sistemos:

$$AM_r^* = 0,$$

$$DM_r^* + \theta_p^* - A^T u_r^* = 0$$

galima rasti tikrąsias M_r^* , ir u_r^* reikšmes:

$$u_r^* = (A D^{-1} A^T)^{-1} A D^{-1} \theta_p^* = \bar{H} \theta_p^*, \quad (5.36)$$

$$M_r^* = \left[D^{-1} A^T (A D^{-1} A^T)^{-1} A D^{-1} - D^{-1} \right] \theta_p^* = \bar{G} \theta_p^*. \quad (5.37)$$

Pagal formules (5.36), (5.37) suskaičiuoti vektoriai $\mathbf{u}_r^*$, ir $\mathbf{M}_r^*$ visiškai sutampa su optimaliais uždavinių (5.24)–(5.26), (5.27)–(5.29) sprendiniais.

Treska plastiškumo sąlygų atveju liekamųjų poslinkių ir momentų influen-
tinės matricos $\overline{\mathbf{H}}$ ir $\overline{\mathbf{G}}$ nepriklauso nuo įrašų $\mathbf{M}_j$:

$$\mathbf{u}_r^* = \overline{\mathbf{H}} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{H} \boldsymbol{\lambda}^*, \quad \mathbf{M}_r^* = \overline{\mathbf{G}} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda}^*. \quad (5.38)$$

Tai turi svarbią reikšmę, sudarant patikrinamųjų uždavinių matematinius modelius: pradžioje taikomo Treska takumo sąlygos, ir tik baigiamajame uždaviniio sprendimo etape – Mizeso plastiškumo kriterijus.

5.5. Kartotinės-kintamosios apkrovos optimizavimo algoritmas

Prisitaikiusi plokštė yra saugi plastinio suirimo atžvilgiu, tačiau ji gali netenkinti eksploatacinių reikalavimų (pavyzdžiui, standumo apribojimų). Todėl plokštės apkrovos optimizavimo uždavinyje turi būti ne tik stiprumo (plastiškumo), bet ir įlinkius ribojančios sąlygos. Uždavinio matematinis modelis Treska plastiškumo sąlygų atveju yra:

rasti

$$\max \left(\mathbf{T}_{sup}^T \mathbf{F}_{sup} - \mathbf{T}_{inf}^T \mathbf{F}_{inf} \right), \quad (5.39)$$

kai

$$\varphi_{ij} = C_i - \boldsymbol{\Phi}_i (\mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda}) \geq \mathbf{0}, \quad (5.40)$$

$$\lambda_{ij} [C_i - \boldsymbol{\Phi}_i (\mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda})] = \mathbf{0}, \quad (5.41)$$

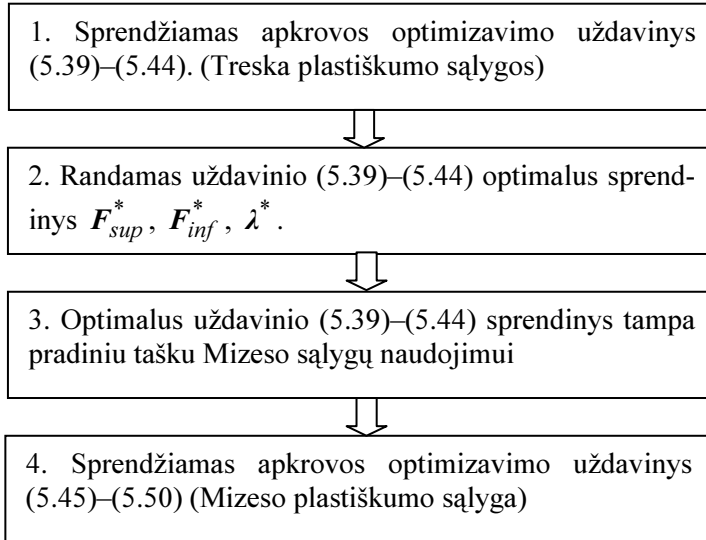
$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{ij}), \quad i \in I, \quad j \in J, \quad (5.42)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u}_{e,inf}, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{u}_{e,sup} \leq \mathbf{u}_{max}. \quad (5.44)$$

Čia $\mathbf{u}_{e,sup}$ ir $\mathbf{u}_{e,inf}$ yra maksimalūs ir minimalūs tamprūs poslinkiai. Kartu su liekamaisiais poslinkiais $\mathbf{u}_r$ jie neturi viršyti maksimalių ir minimalių poslinkių ribų $\mathbf{u}_{max}$ ir $\mathbf{u}_{min}$. Optimalus uždavinio sprendinys yra $\mathbf{F}_{sup}^*$, $\mathbf{F}_{inf}^*$, $\boldsymbol{\lambda}^*$. Patikri-

namojo optimizavimo uždavinio sprendimo algoritmas, apjungiantis Treską prie Mizeso takumo sąlygas parodytas 5.2 paveiksle.



5.2 pav. Patikrinamojo uždavinio (Treska–Mizeso) principinė algoritmo schema

Fig. 5.2. The algorithm of check optimization with Tresca and Mises plasticity conditions

Pasinaudojus influentinėmis matricomis $\mathbf{G}$ ir $\mathbf{H}$, sudaromas apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis Mizeso plastiškumo sąlygų atveju: rasti

$$\max \left(\mathbf{T}_{sup}^T \mathbf{F}_{sup} + \mathbf{T}_{inf}^T \mathbf{F}_{inf} \right), \quad (5.45)$$

kai

$$\varphi_{ij} = (M_{0i})^2 - (\mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{G}\lambda)^T \Pi_i (\mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{G}\lambda) \geq 0, \quad (5.46)$$

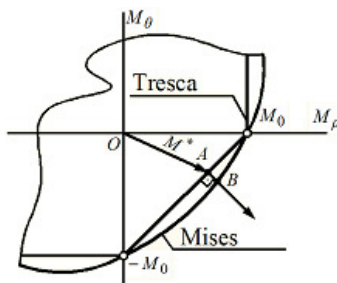
$$\lambda_{ij} \left[(M_{0i})^2 - (\mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{G}\lambda)^T \Pi_i (\mathbf{M}_{ei,j} + \mathbf{G}\lambda) \right] = 0, \quad (5.47)$$

$$\lambda_{ij} > 0, \quad \lambda = (\lambda_{ij}), \quad i \in I, \quad j \in J, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{H}\lambda + \mathbf{u}_{e,inf}, \quad (5.49)$$

$$\mathbf{H}\lambda + \mathbf{u}_{e,sup} \leq \mathbf{u}_{max}. \quad (5.50)$$

Grafiškai perėjimas nuo Treska prie Mizeso plastiškumo sąlygų parodytas 5.3 paveiksle.



5.3 pav. Perėjimo nuo Treska prie Mizeso takumo sąlygos fragmentas

Fig. 5.3. The fragment of the switch from Tresca plasticity conditions to Mises plasticity conditions

5.6. Skaitinis pavyzdys

Nagrinėjama žiedinė su apvalia skylė viduryje paremta išoriniu kontūru lankstine nepaslankia atrama plokštė, kurios geometrija ir kraštinės sąlygos parodytos 5.4 paveiksle. Plokštės spindulys $R=1,0\text{ m}$, aukštis $h=0,025\text{ m}$ ir skylės diametras $d=0,3\text{ m}$. Išorinis kontūras apkrautas išskirstytu pastoviu momentu

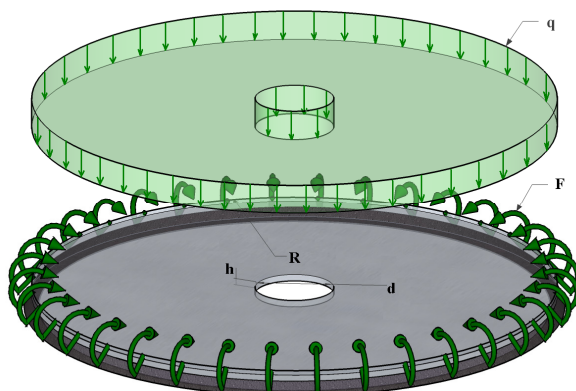
$F=5,0 \frac{\text{KNm}}{\text{m'}}$ (nuolatinė apkrova). Medžiaga – plienas, jo tamprumo modulis

$E=210 \cdot 10^9\text{ MPa}$, puasono koeficientas $\nu=0,3$ ir takumo riba $\sigma_y=235 \cdot 10^6\text{ MPa}$.

plokštės ribinis momentas $M_0 = \frac{1}{4} \sigma_y t^2 = 36718,75\text{ Nm'}$. Diskretinis modelis parodytas 5.5 paveiksle. Jį atitinka įrašų vektorius $\mathbf{M} = (M_{\rho,1}, M_{\theta,1}, M_{\rho,2}, M_{\theta,2}, \dots, M_{\rho,12}, M_{\theta,12})^T$. Ribojamas pirmojo mazgo vertikalus poslinkis: $0 \leq u_1 \leq 0,037\text{ m}$.

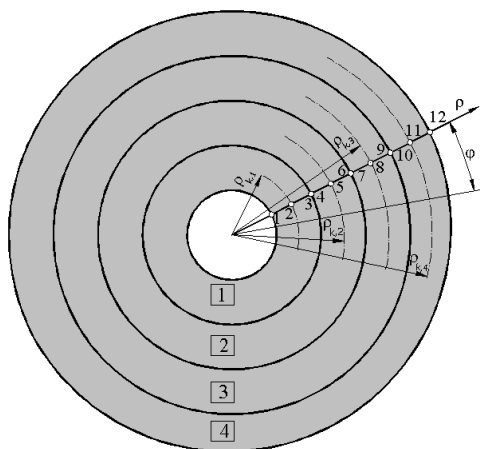
Apkrovos optimizavimo uždavinys sprendžiamas pagal 5.2 paveiksle parodytą algoritmą: t. y. pirmiausia sprendžiama pagal matematini modelį (5.39)–(5.44), po sprendžiama jau pagal (5.39)–(5.44). Optimizavimo uždavinių nežinomieji yra tolygiai išskirstytos apkrovos q (pav. 5.4) kitimo ribos $\mathbf{F}_{sup}^*$, $\mathbf{F}_{inf}^*$ bei plastiniai daugikliai λ^* . Išsprendus uždavinį (5.39)–(5.44) su Treska takumo

sąlygomis gauta $F_{sup}^* = q^* = 131,246 \text{ kPa}$ ir perėjus prie Mizeso – $F_{sup}^* = q^* = 140,747$. Suminiai momentai Treska ir Mizeso takumo sąlygų atvejams parodyti paveiksle 5.6.



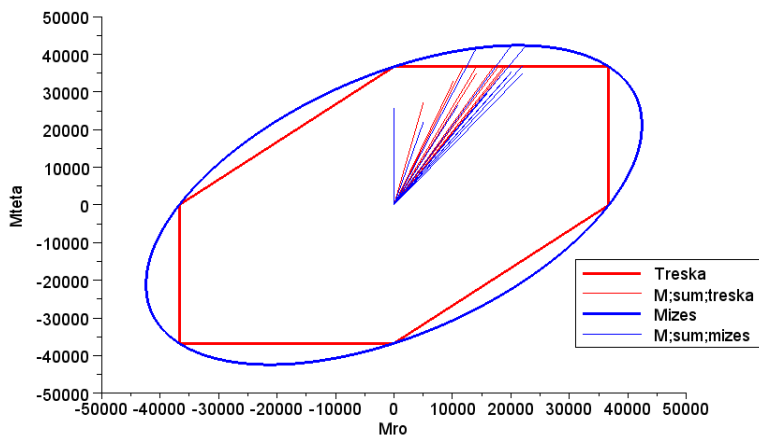
5.4 pav. Apvalios plokštės geometrija ir kraštinės sąlygos

Fig. 5.4. Geometry of round plate and boundary conditions



5.5 pav. Apvalios plokštės diskretinis modelis

Fig. 5.5. Discretization of round plate



5.6 pav. Suminiai momentai

Fig. 5.6. Total moments

Kaip matome pagal paveikslą 5.6 Mizeso takumo sąlygos leidžia didesnius plastinius momentus, kas sąlygoja ir didesnę tikslo funkcijos reikšmę.

5.7. Penktojo skyriaus išvados

1. Treska plastiškumo sąlygų atveju liekamųjų įrašų ir poslinkių infliuentinės matricos nepriklauso nuo liekamųjų įrašų $\mathbf{M}_r$.
2. Mizeso plastiškumo sąlygų atveju infliuentinės matricos turėtų būti formuojamos, pasitelkus plastiškumo sąlygų gradientus, kurie jau priklauso nuo $\mathbf{M}_r$. Pagrindinis patikrinamasis uždavinys Mizeso sąlygų atveju tampa praktiškai sunkiai realizuojamas, net pasitelkus kompiuterines algebros metodus.
3. Vienas iš įmanomų apkrovos optimizavimo uždavinio sprendimo būdų, taikant Mizeso plastiškumo sąlygą, yra įmanomas tik pasiekus analogiško uždavinio optimalų sprendinį, gauta su Treska plastiškumo sąlygomis.

Bendrosios išvados

Bet kurios naujos konstrukcijų skaičiavimo metodikos įdiegimo procese (tai galima pavadinti ir eksperimentine plėtra) išskirtini trys etapai: 1) algoritmų realizavimas kompiuterinėmis technologijomis 2) metodikos aprūpinimas normatyvine dokumentacija 3) eksperimentinis projektavimas. Nors teoriniai statybinės mechanikos optimizavimo uždaviniai, kuriems skirtas šis disertacinis darbas, yra išanginis konstrukcijų optimalaus projektavimo etapas, vis dėl to ir čia sugebėta praturtinti pirmąjį ir antrąjį etapus susiejant algoritmus bei standartų reikalavimus įgyvendinančią programinę įrangą. Visos darbo teorinės išvados ir pasiūlytos metodikos iliustruotos skaitiniais pavyzdžiais. Glaustai aptariamos pagrindinės išvados:

1. Tyrimais nustatyta, kad tamprioji plastinė konstrukcija, veikiamą kintamos kartotinės apkrovos, visada prisitaiko, jei analizės netiesinio iški-
lo matematinio programavimo uždavinys turi nors vieną leistinąjį sprendinių srities tašką.
2. Statybinių prisitaikančių konstrukcijų projektavime taikomi apkrovų deriniai, judama ir vienkartė apkrova gali būti realizuojama, pasitelkus kintamos kartotinės apkrovos sampratą.
3. Taikant sukurtuosius optimizavimo uždavinių sprendimo metodus galima priartėti prie statybos inžinerijos praktikai aktualios diskretinės konstrukcijų optimizacijos: nustačius tolygiai kintančius skerspjūvio pa-

rametrus (sienutės ar lentynos storis, plotas), galima iš gamintojų siūlomų standartinių profiliuotųjų sortamento parinkti tokį profilį, kurio parametrai yra didesni už apskaičiuotuosius parametrus arba jiems lygūs.

4. Taikant sukurtąją iteracinę integralaus projektavimo metodiką galima optimizuoti statybines prisitaikančias konstrukcijas, atsižvelgiant į stiprumo, standumo ir klumpamosios galios (pagal EN1993 ir NEN6771) sąlygas. Necentrinio gniuždymo atveju klumpamosios galios skaičiavime yra atsižvelgiama ir į plastines deformacijas. Taip patobulinus optimizavimo algoritmus, patikslėja plieninių konstrukcijų projektavimo rezultatai.
5. Klumpamosios galios skaičiavimus perkėlus į komercinę kompiuterinę programą MatrixFrame 4.1 (ar bet kurią kitą programą su įdiegtais projektavimo standartais), galima koncentruotis ties paties optimizavimo algoritmo tobulinimu, o ne ties sudėtingais necentrinio gniuždymo skaičiavimo algoritmais. Taikant sukurtąją iteracinę integralaus projektavimo metodiką, galima įvesti konstrukcijos plastinio būvio kintamuosius į komercinės programos skaičiavimus, t. y. įvertinti kintamą apkrovos pobūdį nenagrinėjant apkrovimo istorijos. Būtent tokios skaičiavimo metodikos yra stokojama komercinėse programose, kuriose dažniausiai yra nagrinėjama tik konkreti apkrovos istorija (tuo būdu įmanoma nagrinėti ir ne vieną apkrovimo istoriją, po to apskaičiuojant suminę poveikių gaubtinę). Tačiau atskirų apkrovimo istorijų poveikių suma nėra tapati kintamos kartotinės apkrovos poveikiui, nes konstrukcijoje nuo vienos apkrovimo istorijos atsiradę plastinės sritys (lankstai) įtakoja kitos apkrovimo istorijos rezultatus, ir į tai nėra atsižvelgiama. Pasiūlytoji optimizavimo metodika šio trūkumo neturi.
6. Remiantis darbe sukaupta patirtimi, galima teigti, kad optimizavimo uždavinių sprendimo apimtis priklausomai nuo skaičiuojamųjų konstrukcijos elementų skaičiaus didėja tiesiškai, o priklausomai nuo apkrovų viršūnių skaičiaus $p=2^m$ – eksponentiškai. Atsižvelgus į dabartines asmeninių kompiuterių galimybes, įmanoma optimizuoti prisitaikančias konstrukcijas, veikiamas iki 32 apkrovų derinių ($m=4$).

Literatūra ir šaltiniai

Ahuja, R. K.; Magnanti, T. L.; Orlin, J. B. 1993. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications.

Alwis, W. A. M.; Grundy, P. 1985. Shakedown analysis of plates, *International Journal of Mechanical Sciences* 27: 71–82.

Atkočiūnas, J. 1994. *Design of elastoplastic systems under repeated loading*. Vilnius: Science and encyclopaedic publishing house, (in Russian).

Atkočiūnas, J.; Borkowski, A.; König, J. A. 1981. Improved bounds for displacements at shakedown, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 28: 365–376.

Atkočiūnas, J.; Čižas, A. E. 2009. *Netamprių konstrukcijų mechanika*. Technika.

Atkočiūnas, J.; Karkauskas, R. 2010. *Tamprių plastinių strypinių konstrukcijų optimizavimas*. Technika.

Atkočiūnas, J.; Nagevičius, J. 2004. *Tamprumo teorijos pagrindai*. Technika.

Atkočiūnas, J. 1999. Mathematical models of optimization problems at shakedown, *Mechanics Research Communications* 26: 319–326.

Barauskas, R.; Belevičius, R.; Kačianauskas, R. 2004. *Baigtinių elementų metodo pagrindai*. Technika.

Bathe, K. J. 2006. *Finite element procedures*. Prentice Hall, Pearson Education, Inc.

Bazaraa, M. S.; Sherali H. D.; Shetty, C. M. 2004. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. New York: John Wiley & Sons Ltd.

- Belytschko, T. 1972. Plane stress shakedown analysis by finite elements, *International Journal of Mechanical Sciences* 14: 619–625.
- Belytschko, T.; Liu, W. K.; Moran, B. 2000. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. New York: John Wiley & Sons Ltd.
- Bertsekas, D. P. 1995. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific
- Borkowski, A.; Atkočiūnas, J. 1975. Optimal design for cyclic loading, in A. Sawczuk, Z. Mróz (eds.). *Optimization in structural design*. Berlin: Springer-Verlag, 433–440.
- Bower, A. F. 2010. *Applied Mechanics of Solid*. CRC Press.
- Capurso M., Corradi L., Maier G.: Bounds on deformations and displacements in shakedown theory. Proc. Matériaux et Structures sous Chargement Cyclique, Palaiseau, France. 1978. p. 213–244.
- Casciaro, R.; Garcea, G. 2002. An iterative method for shakedown analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191: 5761–5792.
- Cinquini, C.; Guerlement, G.; Lamblin, D. 1980. Finite element iterative methods for optimal elastic design of circular plates, *Computers and Structures* 12: 85–92.
- Čižas, A. 1993. *Medžiagų atsparumas*. Technika.
- Cohn, M. Z.; Parimi, S. R. 1973. Optimal shakedown of plastic structures for fixed and shakedown loadings, *Journal of Applied Mechanics* 40: 595–599.
- Corradi, L.; Maier, G. 1974. Dynamic inadapation for elastic-perfectly plastic continua, *Journal of Mechanics Physics and Solids* 22: 401–413.
- Corradi, L.; Zavelani, A. 1974. A linear programming approach to shakedown analysis of structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3: 37–53.
- Čyras, A. 1983. *Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures*. New York: John Wiley & Sons Ltd.
- Čyras, A. 1989. *Statybinė mechanika*. Mokslas.
- Čyras, A.; Atkočiūnas, J. 1984. Mathematical model for the analysis of elastic–plastic structures under repeated–variable loading. *Mechanics Research Communications* 11: 353–360.
- Čyras, A.; Borkowski, A.; Karkauskas, R. 2004. *Theory and methods of optimization of rigid-plastic systems*. Technika.
- De Saxcé G. Sur quelques problèmes de mécanique des solides considérés comme matériaux à potentiels convexes. These de Doctorat, l'Université de Liège. 1986.
- Dorosz, St. 1978. An improved bound to maximum deflections of elastic-plastic structures at shakedown, *Journal of Structural Mechanics* 6: 267–287.
- Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*. Brussels, 2005. 91 p.
- Faccioli, E.; Vitiello, E. 1973. A finite element linear programming method for the limit analysis of thin plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 5: 311–325.

- Ferris, M. C.; Tin-Loi, F. 1999. On the solution of a minimum weight elastoplastic problem involving displacement and complementarity constraints, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 174: 107–120.
- Gallager, R. H. 1975. *Finite element analysis. Fundamentals*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc.
- Giambanco, F. 2000. Multicriteria optimal design of circular plates, in *IASS-IACM 2000, Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures*, Chania-Crete, June 4–7, 2000.
- Giambanco, F.; Palizzolo, L. 1995. Optimality conditions for shakedown design of trusses, *Computational Mechanics* 16: 369–378.
- Giambanco, F.; Palizzolo, L.; Cirone, L. 1998a. Elastic plastic analysis iterative solution, *Computational Mechanics* 21: 149–160.
- Giambanco, F.; Palizzolo, L.; Cirone, L. 1998b. Computational methods for optimal shakedown design of FE structures, *Structural Optimization* 15: 284–295.
- Giambanco, F.; Palizzolo, L.; Polizzotto, C. 1994a. Optimal shakedown design of beam structures, *Structural Optimization* 8: 156–167.
- Giambanco, F.; Palizzolo, L.; Polizzotto, C. 1994b. Optimal shakedown design of circular plates, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* 120: 2535–2555.
- Heyman, J. 1958. Minimum weight of frames under shakedown loading, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* 84: 1–25.
- Jankovski, V.; Atkočiūnas, J. 2008. *MATLAB* implementation in direct probability design of optimal steel trusses, *Mechanika* 74(6): 30–37.
- Jirasek, M.; Bažant, Z. P. 2002. *Inelastic analysis of structures*. New York: John Wiley&Sons.
- Kalanta, S. 1995. Равновесные конечные элементы в расчётах упругих конструкций [The equilibrium finite elements in computation of elastic structures], *Statyba [Civil Engineering]* 1: 25–47.
- Kalanta, S. 2007. *Taikomosios optimizacijos pagrindai*. Technika.
- Kalishky, S. 1989. *Plasticity: theory and engineering applications*. Amsterdam: Elsevier.
- Kalishky, S. 1996. Elasto-plastic analysis with limited plastic deformations and displacements, *Journal of Mechanics of Structures and Machines* 24: 39–50.
- Kalishky, S.; Lógó, J. 1997. Optimal plastic limit and shakedown design of bar structures with constraints on plastic deformation, *Engineering Structures* 19: 19–27.
- Kalishky, S.; Lógó, J. 2002. Plastic behaviour and stability constraints in the shakedown analysis and optimal design of trusses, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 24: 118–124.
- Kamenjarzh, J.; Merzljakov, A. 1994a. On kinematic method in shakedown theory. I: Duality of extremum problems, *International Journal of Plasticity* 10: 363–380.
- Kamenjarzh, J.; Merzljakov, A. 1994b. On kinematic method in shakedown theory. II: modified kinematic method, *International Journal of Plasticity* 10: 381–392.

- Kamenjarzh, J.; Weichert, D. 1992. On kinematic upper bounds for the safety factor in shakedown theory, *International Journal of Plasticity* 8: 827–837.
- Kaneko, I.; Maier, G. 1981. Optimum design of plastic structures under displacement's constraints, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 27: 369–391.
- Karadeniz, S.; Ponter, A. R. S. 1984. A linear programming upper bound approach to the shakedown limit of thin shells subjected to variable thermal loading, *Journal of strain analysis for engineering design* 19: 221–230.
- Karkauskas, R.; Krutinis, A.; Atkočiūnas, J.; Kalanta, S.; Nagevičius, J. 1995. *Statybinės mechanikos uždavinių sprendimas kompiuteriais*. Mokslo ir enciklopedijų leidykla. 264 p.
- Kleiber, M.; König, J. A. (eds.). 1990. *Inelastic solids and structures. Antoni Sawczuk memorial volume*. Swansea: Pineridge Press.
- Kleiber, M.; Wozniak, Cz. 1991. *Nonlinear mechanics of structures*. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers.
- Koiter, W. T. 1956. A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen. Series B*. 59: 24–34.
- Koiter, W. T. 1960. General theorems for elastic-plastic solids, in I. N. Sneddon, R. Hill (eds.). *Progress in solid mechanics*. Amsterdam, 165–221. (nėra leidyklos pavadinimo)
- König, J. A. 1975. On optimum shakedown design, in A. Sawczuk, Z. Mróz (eds.). *Optimization in structural design*. Berlin: Springer-Verlag, 402–414.
- König, J. A. 1982a. On some developments in the shakedown theory, *Advances in Mechanics* 5: 237–258.
- König, J. A. 1987. *Shakedown of elastic-plastic structures*. Amsterdam: Elsevier.
- König, J. A.; Maier, G. 1981. Shakedown analysis of elastoplastic structures: A review of recent developments, *Nuclear Engineering and Design* 66: 81–95.
- Lanczos, C. 1970. *The variational principles of mechanics*. Dover publications, Inc.
- Lange-Hansen, P. 1998. *Comparative study of upper bound methods for the calculation of residual deformations after shakedown*. Series R, 49, Lyngby, Technical University of Denmark, Dept. of Structural Engineering and Materials.
- Maier, G. 1969. Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow-laws, *Meccanica* 6: 250–260.
- Maier, G. 1970. A matrix structural theory of piece wise-linear plasticity with interacting yield planes, *Meccanica* 7: 51–66.
- Maier, G.; Zavelani, A.; Benedetti, D. 1972. A finite element approach to optimal design of plastic structures in plane stress, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 4: 455–473.
- Malvern, L. E. 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc.
- Melan E. Theorie statisch unbestimmter Systeme. *Proceedings Second Congress IABSE, Berlin*, 1936. p. 43–64.

Melan, E. 1938. Der Spannungszustand eines "Mises-Hencky'schen" Kontinuums bei veränderlicher Belastung, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien* 147: 73–87.

Melan, E. 1938. Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums, *Ingenieur-Archiv* 9: 116–126.

Merkevičiūtė, D., Atkočiūnas, J. 2006. Optimal shakedown design of metal structures under stiffness and stability constraints. *Journal of Constructional Steel Research*. 62: 1270–1275.

Morelle, P. 1986. Numerical shakedown analysis of axisymmetric sandwich shells. An upper bound formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 23: 2071–2088.

Morelle, P., 1989. Analyse duale de l'adaptation plastique des structures par la méthode des éléments finis et la programmation mathématique. Thèse de Doctorat, Université de Liège, Belgique.

Mróz, Z.; Weichert, D.; Dorosz St. (eds.). 1995. *Inelastic behaviour of structures under variable loads*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Muscat, M.; Mackenzie, D.; Hamilton, R. 2003. Evaluating shakedown under proportional loading by non-linear static analysis, *Computers and Structures* 81: 1727–1737.

NEN 6771: Technische Grondslagen voor Bouwconstructies. TGB 1990. Staalconstructies. Stabiliteit, 2000 + A1, 2001.

Nguyen-Dang H., Morelle P. Numerical shakedown analysis of plates and shells of revolution. In: Proceedings of 3rd world congress and exhibition on FEMs. Beverly Hills. 1981.

Nguyen-Dang, H.; Morelle, P. 1990. Optimal plastic design and the development of practical software. In: D. Lloyd Smith (Ed.). *Mathematical programming methods in structural plasticity*. Springer-Verlag, Berlin. 1990. p. 207–229.

Palizzolo, L. 2000. Multicriteria optimal design of continuous beams, in *ECCOMAS 2000, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, September 11–14, 2000.

Pham, D. C. 2003. Plastic collapse of a circular plate under cyclic loads, *International Journal of Plasticity* 19: 547–559.

Polizzotto, C. 1982. A unified treatment of shakedown theory and related bounding techniques, *Solid Mechanics Archives* 7: 19–75.

Polizzotto, C. 1984. Shakedown analysis and design in presence of limited ductility behaviour, *Engineering Structures* 6: 80–86.

Polizzotto, C. 1993b. A study on plastic shakedown of structures. Part II: Theorems, *Journal of Applied Mechanics* 60: 324–330.

Polizzotto, C. 2003. Variational methods for the steady state response of elastic–plastic solids subjected to cyclic loads, *International Journal of Solids and Structures* 40: 2673–2697.

- Polizzotto, C.; Rizzo, S. 1987. Optimum design of reinforced concrete under variable loadings, *Engineering Optimization* 11: 327–338.
- Ponter, A. R. S. 1972. An upper bound on the small displacements of elastic, perfectly plastic structures, *ASME Transactions Series E Journal of Applied Mechanics* 39: 959–963.
- Ponter, A. R. S. 1975. General displacement and work bounds for dynamically loaded bodies, *Journal Mechanic Physic and Solids* 23: 151–163.
- Ponter, A. R. S.; Engelhardt, M. 2000. Shakedown limits for a general yield condition: implementation and application for a von Mises yield condition, in D. Weichert, G. Maier (eds.). *Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 11–29.
- Ponter, A. R. S.; Fuschi, P.; Engelhardt, M. 2000. Limit analysis for a general class of yield conditions, *European Journal of Mechanics – A/Solids* 19: 401–421.
- Ponter, A. R. S.; Karadeniz, S.; Carter, K. F. 1990. Extended upper bound shakedown theory and finite element method for axisymmetric thin shells, in M. Kleiber and J.A.Konig (eds.). *Inelastic Solids and Structures*. Swansea: Pineridge Press, Swansea, 421–428.
- Pycko, S. 1997. A cycle-oriented incremental analysis of shakedown problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40: 3163–3179.
- Rizzo, S. 1983. Shakedown analysis of discrete elastic-work-hardening structures with displacement constraints, in *Proceedings International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, SMIRT-7*. Chicago, 311–318.
- Rizzo, S.; Giambanco, F. 1984. Shakedown analysis of limited-ductility structures, *Meccanica* 19: 151–157.
- Rozvany, G. I. N. 1976. *Optimal design of flexural systems: Beams, grillages, slabs, plates, and shells*. New York: Pergamon Press.
- Rozvany, G. I. N. 1989. *Structural design via optimally criteria*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Save, M. A.; Prager, W. 1985. *Structural optimization*. New York: Plenum Press.
- Smith, I. M.; Griffiths, D. V. 2004. *Programming the finite element method*. John Willey & Sons, Ltd.
- Spiliopoulos, K. V. 1999. A fully automatic force method for the optimal shakedown design of frames, *Computational Mechanics* 23: 299–307.
- Tin-Loi, F. 2000. Optimum shakedown design under residual displacement constraints, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 19: 130–139.
- Vitiello, E. 1972. Upper bounds to plastic strains in shakedown of structures subjected to cyclic loads, *Meccanica* 1: 205–213.
- Vu, D. K.; Yan, A. M.; Nguyen-Dang, H. 2004a. A dual form for discretized kinematic formulation in shakedown analysis, *International Journal of Solids and Structures* 41: 267–277.

Vu, D. K.; Yan, A. M.; Nguyen-Dang, H. 2004b. A primal–dual algorithm for shakedown analysis of structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193: 4663–4674.

Weichert, D.; Maier, G. (eds.). 2000. *Inelastic analysis of structures under variable loads. Theory and engineering applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Weichert, D.; Maier, G. (eds.). 2002. *Inelastic behaviour of structures under variable repeated loads*. Wien: Springer-Verlag.

Žiliukas, A. 2004. *Medžiagų mechanika*. Technologija.

Zouain, N.; Borges, L.; Silveira, J. L. 2002. An algorithm for shakedown analysis with nonlinear yield functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191: 2463–2481.

Zouain, N.; Silveira, J. L. 2000. Variational principles for shakedown analysis, in D. Weichert, G. Maier (eds.). *Inelastic analysis of structures under variable loads. Theory and engineering applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 147–165.

Zouain, N.; Silveira, J. L. 1999. Extremum principles for bounds to shakedown loads, *European Journal of Mechanics – A/Solids* 18: 879–901.

Храптович, Э. В.; Аткинчунас, Ю. Ю. 2001. Особенности применения математического программирования в задачах приспособляемости конструкций. *Statyba 21*: 106–114.

Autoriaus publikacijų disertacijos tema sąrašas

Straipsniai recenzuojamuose mokslo žurnaluose

Atkočiūnas, J.; Merkevičiūtė, D.; Venskų, A.; Nagevičius, J. 2007a. Prisitaikančiųjų santvarų optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai judamosios apkrovos atveju. *Ūkio technologinis ir ekonominis vystymas*. 2(13): 93–99. ISSN 1392-8619. (Thomson ISI Web of Science)

Atkočiūnas, J.; Merkevičiūtė, D.; Venskų, A.; Skaržauskas, V. 2007b. Nonlinear programming and optimal shakedown design of frames. *Mechanika*. 2(64): 27–33. ISSN 1392-1207. (Thomson ISI Web of Science)

Atkočiūnas, J.; Merkevičiūtė, D.; Venskų, A. 2008a. Optimal shakedown design of bar systems: Strength, stiffness and stability constraints. *Computers and Structures*. 17–18(86): 1757–1768. ISSN 0045–7949. (Thomson ISI Web of Science)

Atkočiūnas, J.; Venskų, A. 2011. Optimal shakedown design of frames under stability conditions according to standards. *Computers and Structures*. 3–4(89): 435–443. ISSN 0045-7949. (Thomson ISI Web of Science)

Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Venskų, A. 2009. Discrete optimization problems of the steel bar structures. *Engineering Structures*. 6(31): 1298–1304. ISSN 0141-0296. (Thomson ISI Web of Science)

Venskus, A.; Atkočiūnas, J.; Kalanta, S.; Ulitinas, T. 2010. Integrated load optimization of elastic-plastic axisymmetric plates at shakedown. *Journal of Civil Engineering and Management*. 2(16): 203–208. ISSN 1392-3730. (Thomson ISI Web of Science)

Straipsniai kituose leidiniuose

Atkočiūnas, J.; Merkevičiūtė, D.; Venskus, A.; Rimkus, L. 2007c. Optimal shakedown design of steel structures. *Anwendung der Optimierung in der nichtlinearen Tragwerksanalyse. Schriftenreihe des Institutes fuer Konstruktiven Ingenieurbau Bauhaus-Universität Weimar*. Weimar : Bauhaus-Universität Weimar, Fakultät Bauingenieurwesen, 137–144. ISBN 978-3-86068-307-1.

Atkočiūnas, J.; Venskus, A. 2008b . Optimal shakedown design of frames under stability conditions, *Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Structures Technology*. Stirlingshire: Civil-Comp Press, 1–12. ISBN 978-1905-08-822-5.

Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Venskus, A. 2007d. Discrete optimization problems of the steel bar structures, selected papers of the 9th international conference “Modern building materials, structures and techniques”. Vilnius: Technika, 949–954. ISBN 978-9955-28-200-6.

Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Venskus, A. 2007e. Discrete optimization problems of the steel bar structures, in *proceedings of the 9th international conference “Modern building materials, structures and techniques”, [CD]*. Vilnius: Technika, 1–6. ISBN 978-9955-28-189-4. (ISI Web of Science)

Venskus, A.; Atkočiūnas, J. 2005. Plokštės analizės netiesinio uždavinio sprendimo programa "Rūta" ir jos integracijos galimybės, iš *Statyba: 8-osios Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Lietuva be mokslo – Lietuva be ateities“ medžiaga*. Vilnius: Technika, 277–282. ISBN 9986-05-893-7.

Venskus, A.; Atkočiūnas, J. 2006. Patobulintas prisitaikančių sistemų optimizacijos uždavinių sprendimo algoritmas, iš *Statyba: 9-osios Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijos „Mokslas – Lietuvos ateitis“ medžiaga*. Vilnius: Technika, 265–270. ISBN 9955-28-047-6.

Santrauka anglų kalba

Introduction

The introductory chapter presents the relevance of the problem as well as the objective and the main goals of investigation, scientific novelty and originality.

Formulation of the problem

The solution of strength, stiffness and stability problems of structures exposed to repeated variable mechanical or other type loading, is closely linked to shakedown theory. This theory still not used in its full power because of incomplete formulation of some mathematical problems and inconsistent use of the methods of mathematical programming theory.

Solution of shakedown structures optimization problems is difficult as stress-strain state of dissipative systems depends on loading history. Theses difficult optimization problems can be solved by applying energy principles and mathematical programming theory.

The task of the work is to create unified methodology for optimization of elastic-plastic shakedown structures with strength, stiffness and stability constraints by applying extremum energy principles, mathematical programming, numerical methods and state-of-the-art computation technologies.

Topicality of the thesis

Today the evaluation of stability conditions for optimization problems involving elastic-plastic frames remains a topical scientific problem. For example, it is permitted to design elastic-plastic frames using the EN1993 or NEN 6771 standards, but in these standards, the methodology and algorithms for stability evaluation of shakedown structures are not fully described. This situation influenced the choice of topic for this dissertation: optimization methods of shakedown structures in the context of standards. In this research, two types of problems are considered. The first problem is the plastic moments minimization (design problem) of the shakedown frame. The unknowns in this problem are the plastic moments. The second problem is the— load-optimization (checking) problem for a frame subjected to variable repeated load. By solving the load-optimization problem, the maximal load-variation bounds which ensure frame integrity and which satisfy the stiffness and stability requirements of the structure can be found.

Aim and tasks of the work

The main objectives of the present work are: 1) improve existing optimization mathematical models evaluating strength and stiffness constraints for shakedown structures and create new optimization methodology incorporating stability (eccentric compression) constraints; 2) integrate the created optimization software with commercial software MatrixFrame and solve practical optimization problems of shakedown structures according to standards; 3) perform integrated optimization of shakedown structures with strength, stiffness and stability constraints accordingly to standards.

The following tasks have to be performed:

1. Create the improved optimization mathematical models of design and checking problems for shakedown structures including into models elastic and residual displacements.
2. Use the real cross-sections (with no idealisation) for calculations;
3. Create a software for analysis and optimization of shakedown structures.
4. Perform calculations of shakedown structures.
5. Create a methodology allowing to transfer (integrate) plastic state variables (residual forces and displacements) obtained from author created software to MatrixFrame (or similar software) structure analysis flow.
6. Define the relation between the repeated variable load and load combinations occurring in standards.

Scientific novelty

1. New nonlinear mathematical models of checking and design problems with constraints ensuring shakedown and stiffness with stability of structures are created.
2. The methodology of shakedown bar structures optimization was implemented: improved nonlinear mathematical models considering strength, stiffness and

stability (EN1993 and NEN6771) constraints, solution algorithms and performed calculations.

3. New optimization methodology integrating authors created software modules with commercial software (MatrixFrame) was created.
4. A new algorithm for the load optimization problem combining von Mises and Tresca yield criterion based on the Rosen project gradient method is proposed.

Methodology of research

The extremum energy principles of deformable body and theory of mathematical programming are employed in the present work. The equilibrium finite elements were used for discrete mathematical models of optimization problems. The research and calculations are based on small displacements assumption. The investigation is built on author software-engineer sound experience in Matrix Software Company by developing commercial software MatrixFrame for structural analysis and design.

Practical value

The created new optimization methods and mathematical models for shakedown structures evaluating strength, stiffness and stability constraints can be used for real structure design according to standards. The software for shakedown structures optimization problems was created.

The scope of the scientific work

The scientific work is presented in Lithuanian language. It consists of five chapters, the first of which is an introduction, and the last one presents the generalization of achieved results and summary, list of literature, list of publication and addenda. The total scope of the dissertation – 94 pages, 27 pictures, 7 tables, 125 numbered formulas and 2 addenda. The list of references comprises 122 items.

1. Review of Shakedown Theory

This chapter reviews the principal static (Melan) and kinematic (Koiter) shakedown theorems, the shakedown analysis, the constraint methods, the optimal design of shakedown structures, the duality and mathematical programming and the main traits of state-of-the-art research in this field. After review of literature it is concluded:

1. The real loading of civil engineering structures has cyclic nature; therefore the application of shakedown theory in safety evaluation is important and often necessary requirement.
2. The residual displacements part evaluated in mathematical models of optimization problems usually calculated by well-known Koiter inequality. It is necessary to invoke for calculations the residual displacement matrix.
3. The cyclic loading in the commercial software usually is evaluated by loading history. Unfortunately it is not enough to satisfy shakedown of structures.

4. Obviously that existing methodology lack connection between shakedown theory and real design based on standards.
5. There is no methodology to evaluate loading in optimal shakedown design calculations through load combinations.
6. The synthesis of methodology for shakedown structures optimization and real design is not fully elaborated.

2. Improved Optimization Models for Shakedown Structures

The discrete model of the frame at shakedown consists of s equilibrium finite elements. The limit force S_{0k} ($k=1,2,\dots,s$) is assumed constant in the whole finite element. The k th element has s_k nodal points. The approximated nodal forces of each element are the bending moments M and axial forces N . Generalised nodal force $S_v = (M_l, N_l)^T$, $l=1,2,\dots,s_k$, $v=1,2,\dots,\zeta$, where ζ is the total number of discrete model design sections. The nodal internal forces of each element are a combination of one vector of length n of discrete model forces, $S = (S_1, S_2, \dots, S_v, \dots, S_\zeta)^T = (S_z)^T$, and one vector of length n , $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_v, \dots, \Theta_\zeta)^T = (\Theta_z)^T$, $z=1,2,\dots,n$. The degrees of freedom are m , corresponding to m displacement vectors $u_e = (u_{e,1}, u_{e,2}, \dots, u_{e,m})^T$. The load $F(t)$ is characterized by time t and the independent variation bounds, $F_{sup} = (F_{1,sup}, F_{2,sup}, \dots, F_{m,sup})^T$ and $F_{inf} = (F_{1,inf}, F_{2,inf}, \dots, F_{m,inf})^T$, ($F_{inf} \leq F(t) \leq F_{sup}$). The elastic displacements $u_e(t)$ and the forces $S_e(t)$ of the structure are determined using influence matrices of displacements and forces, $\beta = (AKA^T)^{-1}$, $\alpha = KA^T\beta$ respectively, where $u_e(t) = \beta F(t)$, $S_e(t) = \alpha F(t)$, $K = D^{-1}$. Here A is a coefficient matrix of equilibrium equations, $AS = F$, and D is a quasi-diagonal flexibility matrix. The residual displacements u_r and the forces S_r are related to the vector of plasticity multipliers λ by the influence matrices H and G , where $u_r = \bar{H}\Phi^T\lambda = H\lambda$, $S_r = \bar{G}\Phi^T\lambda = G\lambda$, $\bar{H} = \alpha^T$, and $\bar{G} = \alpha AK - K$. Here Φ is the matrix of piecewise-linearized yield conditions, ϕ_j . The number of all possible combinations F_j of load bounds F_{sup} , F_{inf} is $p=2^m$ ($F_{inf} \leq F_j \leq F_{sup}$), where $S_{ej} = \alpha F_j$, $u_{ej} = \beta F_j$, $j=1,2,\dots,p$. It is possible to evaluate directly, not only the variable repeated load F_j , but also other loads F_c (for example a persistent load), addi-

tionally including them in combination j . The elastic forces S_{ec} and elastic displacements u_{ec} resulting from the loads F_c are calculated as $S_{ec} = \alpha F_c$, $u_{ec} = \beta F_c$.

The general mathematical models presented in Table S1 are the basis for the development of the mathematical optimization models of frames at shakedown which are considered in dissertation. In both design and check problems, the objective functions are described by equations (1) and (6) respectively, where the vectors L , T_{sup} , and T_{inf} contain weighting coefficients. The yield conditions φ_j ($j=1,2,\dots,p$) are given by equations (2) and (7) respectively, where j is the number of all possible combinations F_j of load bounds F_{sup} , F_{inf} . The complementary slackness conditions of mathematical programming are given by equations (3) and (8) respectively. Equations (4) and (9) are the respective constraints for the problem unknowns. The vectors M_{max} , M_{min} , F_{max} , and F_{min} play a major role in stability evaluation. For further details on this topic, see Section 3. The stiffness constraints are given in equations (5) and (10) respectively. The optimal parameters for frame design using mathematical model (1)–(5) can be calculated when the yield limit σ_{yk} of the frame material, the lengths L_k of all elements k ($k=1,2,\dots,s$), and the load-variation bounds F_{sup} , F_{inf} are known.

Table S1. General mathematical models of optimization problems

Design problem		Check problem	
find	$\min L^T M_0$,	find	$\max (T_{sup}^T F_{sup} - T_{inf}^T F_{inf})$,
subject to		subject to	
$\varphi_j = M_0 - \Phi (G\lambda + S_{ej} + S_{ec}) \geq 0$,	(2)	$\varphi_j = M_0 - \Phi (G\lambda + S_{ej} + S_{ec}) \geq 0$,	(7)
$\lambda_j^T \varphi_j = 0$,		$\lambda_j^T \varphi_j = 0$,	
$\lambda_j \geq 0$, $\lambda = \sum_j \lambda_j$, $j=1,2,\dots,p$,	(3)	$\lambda_j \geq 0$, $\lambda = \sum_j \lambda_j$, $j=1,2,\dots,p$,	(8)
$M_{min} \leq M_0 \leq M_{max}$,	(4)	$0 \leq F_{sup} \leq F_{max}$, $F_{min} \leq F_{inf} \leq 0$,	(9)
$u_{min} \leq (H\lambda + u_{ej} + u_{ec}) \leq u_{max}$.	(5)	$u_{min} \leq (H\lambda + u_{ej} + u_{ec}) \leq u_{max}$.	(10)

Depending on the cross-sectional shape, various yield conditions can be assumed. The dissertation focuses on yield conditions for rolled I-beam steel sections.

The relation $c_k = \frac{M_{0k}}{N_{0k}}$, $k \in K$ should be determined in advance. The limit moment, $M_{0k} = \sigma_{yk} W_{pl,k} = \xi(\sigma_{yk}, A_k)$, and the limit axial force, $N_{0k} = \sigma_{yk} A_k$, of the element are functions of the cross-sectional area, A_k , and the yield limit of the material,

σ_{yk} . The limit moments M_{0k} of the frame elements and the vectors of plasticity multipliers $\lambda_j \geq 0$, $j=1,2,\dots,p$ are the unknowns of the nonlinear mathematical programming problem (1)–(5). The structural requirements for the frames, M_{min} and M_{max} , are given by conditions (4). The limit moments M_0 and the influence matrices α , β , G , H are related to the A_k , $k=1,2,\dots,s$; these matrices are recalculated during the solution of problem (1)–(5). If the stiffness and stability constraints are neglected, the frame will approach, but not reach, the point of cyclic-plastic collapse. The optimal solution of problem (1)–(5) consists of the vectors M_0^* and λ_j^* , $j=1,2,\dots,p$.

In the case of variable repeated load, the problem of determining the load-variation bounds F_{sup} , F_{inf} for problem (6)–(10) is also important. This problem can be stated as follows: find the shakedown load-variation bounds F_{sup} , F_{inf} , which satisfy the prescribed optimality criterion, $\max \left(T_{sup}^T F_{sup} - T_{inf}^T F_{inf} \right)$, and also the strength, stiffness, and stability requirements of the structure. The vector of limit bending moments M_0 and the limits u_{min} , u_{max} of the total displacements $u = u_r + u_{ej} + u_{ec}$ are known from problem (6)–(10). The optimal solution of this problem consists of the vectors F_{sup}^* , F_{inf}^* , and λ_j^* , $j=1,2,\dots,p$.

A rearrangement of mathematical models (1)–(5) and (6)–(10) for purposes of computer implementation is presented in Table S2.

Table S2. Mathematical models used in the computer implementation

Design problem	Check problem
find $\min \left(L^T M_0 + \lambda_j^T \varphi_j \right)$, (11)	find $\max \left(T_{sup}^T F_{sup} - T_{inf}^T F_{inf} - \lambda_j^T \varphi_j \right)$, (16)
subject to	subject to
$\varphi_j = M_0 - \Phi \left(G\lambda + S_{ej} + S_{ec} \right) \geq 0$, (12)	$\varphi_j = M_0 - \Phi \left(G\lambda + S_{ej} + S_{ec} \right) \geq 0$, (17)
$\lambda_j \geq 0$, $\lambda = \sum_j \lambda_j$, $j=1,2,\dots,p$, (13)	$\lambda_j \geq 0$, $\lambda = \sum_j \lambda_j$, $j=1,2,\dots,p$, (18)
$M_{min} \leq M_0 \leq M_{max}$, (14)	$0 \leq F_{sup} \leq F_{max}$, $F_{min} \leq F_{inf} \leq 0$, (19)
$u_{min} \leq (H\lambda + u_{ej} + u_{ec}) \leq u_{max}$. (15)	$u_{min} \leq (H\lambda + u_{ej} + u_{ec}) \leq u_{max}$. (20)

In mathematical models (11)–(15) and (16)–(20), the complementary slackness conditions given in equations (3) and (8), $\lambda_j^T \varphi_j = 0$, are moved to the objective functions given in equations (11) and (16). This rearrangement is made because the optimal solu-

tion gives $\lambda_j^T \varphi_j = 0$ and because of the Lagrangian relaxation principle, which allows placing constraints into an objective function. If the complementary slackness condition is part of the objective function, the optimization process is considerably faster, because the condition $\lambda_j^T \varphi_j = 0$ is satisfied, not during ordinary iteration, but only when the optimal solution is reached.

The following were concluded:

1. The design and check mathematical models of shakedown structures suppose new theoretical statement: structure will shakedown if problems have initial admissible point.
2. Design of plastic structures should be based on shakedown theory that do not require detailed investigation of loading history.
3. Continues optimization problems can be introductory step for discrete optimization.

3. Optimization of Shakedown Structures in the Context of Standards

The load combinations, occurring in engineering practice, can be modelled as separate cases of variable repeated load. For example if the number of all possible combinations F_j of load bounds F_{sup} , F_{inf} is $p=2^2=4$, then the load domain can be described using four load combinations (Table S3, a). The load combinations can be described by introducing additional multipliers, where the values of the multipliers (the coefficients of each load combination) $k_{11}, k_{12}, \dots, k_{43}$ and the load-variation bounds can be determined by the requirements of the various standards (Table S3, b).

Table S3. The load domain and corresponding load combinations

a)	1) $F_{1,sup} + F_{2,sup} + F_c$; 2) $F_{1,sup} + F_{2,inf} + F_c$; 3) $F_{1,inf} + F_{2,sup} + F_c$; 4) $F_{1,inf} + F_{2,inf} + F_c$.	b)	1) $k_{11}F_{1,sup} + k_{12}F_{2,sup} + k_{13}F_c$; 2) $k_{21}F_{1,sup} + k_{22}F_{2,inf} + k_{23}F_c$; 3) $k_{31}F_{1,inf} + k_{32}F_{2,sup} + k_{33}F_c$; 4) $k_{41}F_{1,inf} + k_{42}F_{2,inf} + k_{43}F_c$,
----	--	----	--

For example, if F_1 represents wind load, F_2 snow load, and F_c permanent load, then the load bounds are: $F_{1,inf}$ = wind from right (WFR), $F_{1,sup}$ = wind from left (WFL), $F_{2,inf}$ = snow from bottom (SFB, included to complete the formal description, but cannot occur in reality), and $F_{2,sup}$ = snow from top (SFT). In this paper, the distributed wind-load action is replaced by a set of concentrated equivalent loads,

$F_1 = \{F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5\}$. The numerical values of the load bounds are determined according to the Eurocode 1 standard. According to this standard, the load domain can be expressed as follows:

- 1) $k_{11}WFL + k_{12}SFT + k_{13}F_c$;
- 2) $k_{21}WFL + k_{22}SFB + k_{23}F_c$;
- 3) $k_{31}WFR + k_{32}SFT + k_{33}F_c$;
- 4) $k_{41}WFR + k_{42}SFB + k_{43}F_c$.

If external influences are incompatible (for example, snow and wind), then they can be easily excluded from the load combination by setting the corresponding multipliers to zero.

The stability of mathematical models (11)–(15) and (16)–(20) is evaluated using the structural restrictions given by equations (14) and (19) respectively, which are calculated according to the stability requirements of the EN1993 or NEN 6771 standards (or even another standard). Various standards have been implemented in commercial software that is available to meet the needs of designers. The author of this dissertation has used the MatrixFrame building-industry software, version 4.1, for stability evaluation.

Frame plastic moments minimization (11)–(15) and load optimization (16)–(20) problems are performed in an iterative manner (Fig. S1., Fig. S2.).

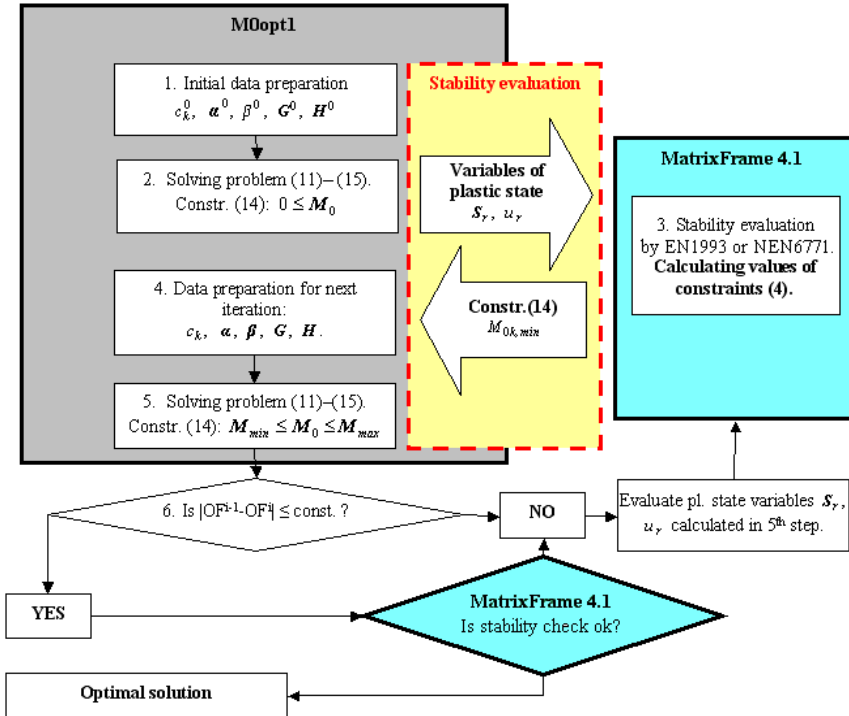


Fig. S1. Flowchart of the proposed solution algorithm for design problem

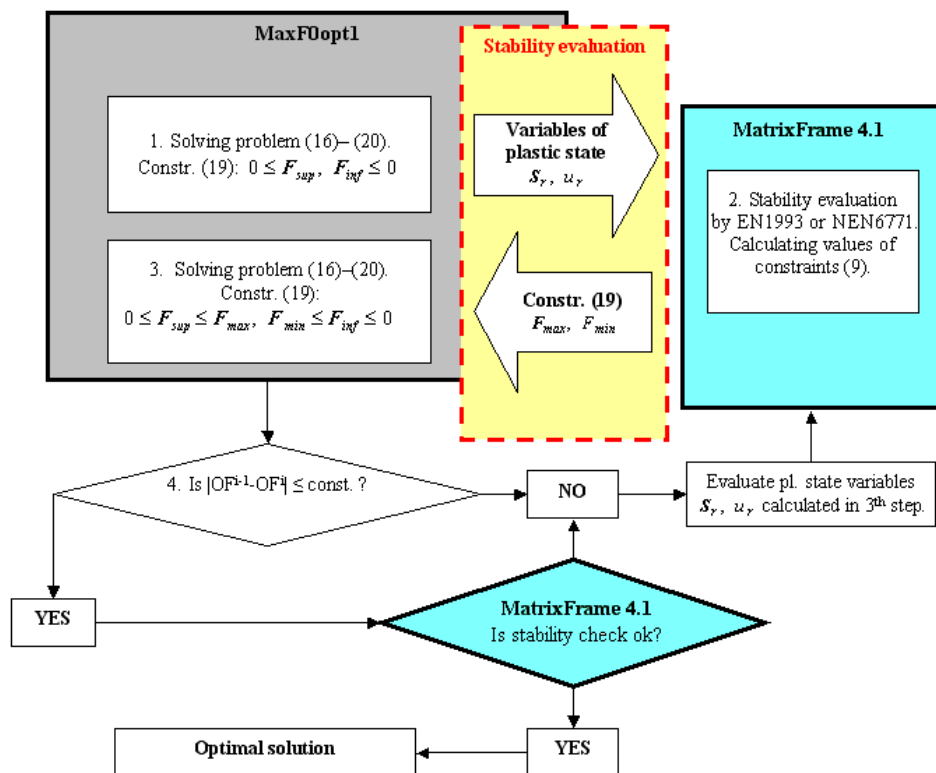


Fig. S2. Flowchart of the proposed solution algorithm for the checking problem

Introduction to examples. An **Example 1** of the design problem (11)–(15) and **Example 2** of the verification problem (16)–(20) illustrate the proposed calculation technique. The convex nonlinear optimization software modules M0opt1 and MaxFOpt1 were used for the first and second problems, respectively. They are developed by the authors and are based on the Rosen project-gradient method (Bazaraa *et al.* 2004) and are used here to obtain a solution of the numerical example under study. For stability evaluation, the MatrixFrame software for the building industry is used. Both examples are applied to a two-story frame (Fig. S3.). The frame is subjected to two sets of independent loads: the horizontal, concentrated forces $F_1 = \{F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_1^5\}$ acting on the nodes of the frame, and the vertical, uniformly distributed forces $F_2 = \{F_2^1, F_2^2\}$ acting on the roof beams (6,7,8,9). A permanent load $F_c = 117 \cdot \text{kN/m}$ acts on the floor beams (10,11). The limits of load variations are defined by the inequalities $F_{1,inf} \leq F_1 \leq F_{1,sup}$,

$F_{2,inf} \leq F_2 \leq F_{2,sup}$. The vector of inner forces of the discretized frame is $S = (M, N)^T = (M_1, M_2, M_3, \dots, M_{28}, N_1, N_2, \dots, N_{11})^T = (S_z)^T$, $z=1, 2, \dots, n=39$, i.e., when both bending moments M and axial forces N are taken into account. The frame is made of steel, with a modulus of elasticity $E = 210$ GPa and a yield limit $\sigma_y = 235$ MPa.

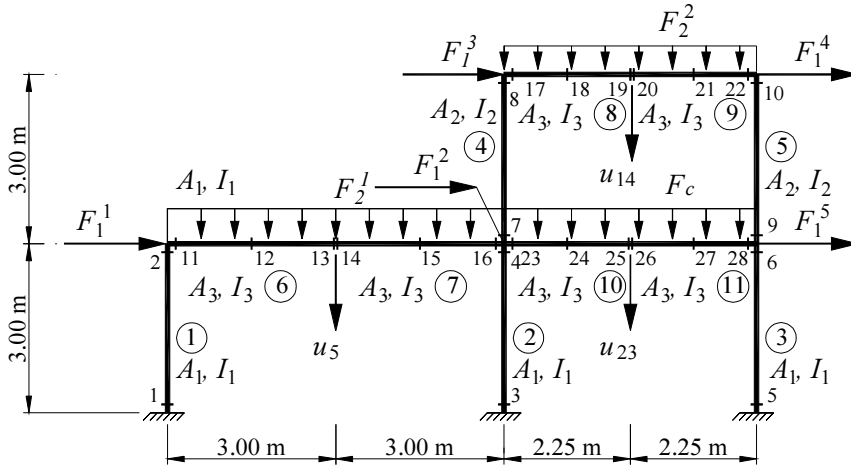


Fig. S3. Discretized frame

The material is elastic-perfectly plastic. The cross-sections of the frame columns, roof, and floor beams are shown in Fig. S4. The upper bound of total displacements constraints u_{max} are chosen according to ratio L_k / δ_{max} where L_k is the length of the k th element (beam), δ_{max} is the value related to building type and is specified in national standards; in the paper $\delta_{max} = 200$ is assumed. The lower bound total displacements constraints $u_{min} = -\infty$ (displacements aren't limited).

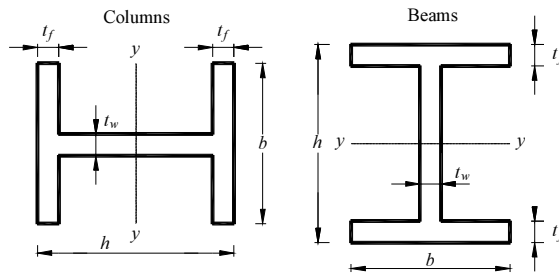


Fig. S4. Cross-sectional shapes for frame columns and beams

Example 1. The plastic moments minimization problem (11)–(15) with stability constraints calculated according to the EN1993 standard is investigated in this example. The limits of load variations are $F_{1,inf} = \{-9,75, -4,9, -5, -6,75, -19,5\}$ kN, $F_{1,sup} = \{13, 6,5, 6,75, 5, 14,6\}$ kN, $F_{2,inf} = \{0,0\}$, $F_{2,sup} = \{48, 48\}$ kN/m. The parameters b and h remain the same throughout the optimization process, with only the thickness $t = t_f = t_w$ of the flanges and web varying. In the case of discrete optimization, the cross-sections are selected from an assortment of available manufactured cross-sections. The main task is to determine the minimal plastic moments of the affected frame (Fig. S3.). The frame plastic moments minimization is performed using mathematical model (11)–(15). The unknowns are plastic moments M_0 , and the vector of plasticity multipliers, λ_j , $j = 1,2,...,4$. Five calculation cases were investigated:

Case C1. Only strength constraints (12) are taken into account. Optimization is continuous;

Case C2. Only strength (12) and stiffness (15) constraints are evaluated. The following total displacement constraints are imposed: $-\infty \leq u_5 \leq 0,03$ m, $-\infty \leq u_{14} \leq 0,0225$ m, $-\infty \leq u_{23} \leq 0,0225$ m. Optimization is continuous;

Case C3. Only strength (12) and structural constraints (14) are taken into account. Optimization is continuous;

Case C4. Only strength (12) and structural constraints (14) are taken into account. Optimization is discrete;

Case C5. All constraints (strength (12), stiffness (15), and structural (stability) (14)) are evaluated. The following total displacement constraints are imposed: $-\infty \leq u_5 \leq 0,03$ m, $-\infty \leq u_{14} \leq 0,0225$ m, $-\infty \leq u_{23} \leq 0,0225$ m. Optimization is continuous.

The calculation cases C1 and C2 was solved using the software M0opt1, whereas for the cases C3 – C5 the software coupling M0opt1-MatrixFrame, using the sequence of operations described in Fig. S1., was used.

The calculated results for all the cases described within the imposed constraints are shown in Table S4 and Fig. S5.

Table S4. Calculated results for the design problem

Case	M_{01} , Nm	M_{02} , Nm	M_{03} , Nm	Objective function (OF)	Volume, m ³	Location of the plastic strains
C1	75441	41673	204168	3991522	0,26149777	6, 2, 23
C2	93970	34942	223206	4403462	0,292369813	23
C3	120537	48302	186579	4173339	0,283231289	23
C4	174986	57610	189018	4755802	0,350856685	23
C5	108090	44151	215258	4466587	0,300776204	23

In cases C2 and C5, the total displacement u_{23} reaches the upper bound $u_{max} = 0,0225\text{m}$. When discrete optimization is used in case C4, the limit moments $M_{01} = 174986\text{Nm}$, $M_{02} = 57610\text{Nm}$, and $M_{03} = 189018\text{Nm}$ correspond to cross-sections HE240, HE160, and IPE330 respectively.

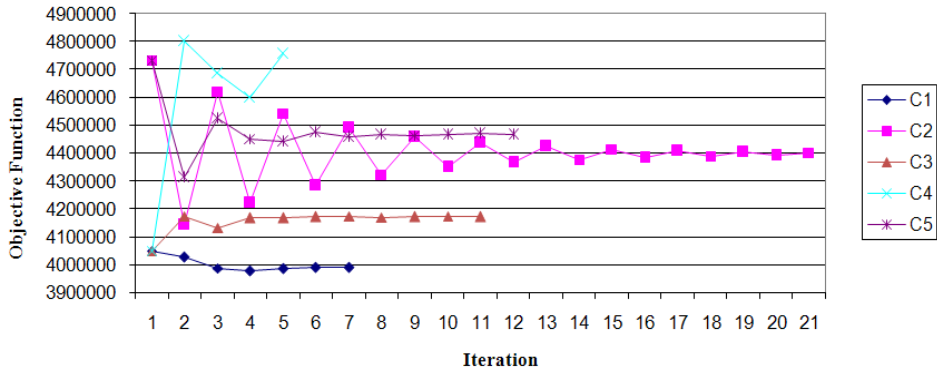


Fig. S5. Convergence of the optimization-problem objective function

It is noteworthy, that the same discrete cross-sections were obtained in 4th and 5th iterations, and therefore the optimization process was stopped and assumed that optimal solution was reached. The discrete optimization (case C4) is very important for civil engineering, however the continuous optimization (cases C1-C3, C5) could be an introductory step to discrete optimization. For example, using section properties, obtained from the continuous optimization, is possible to choose nearest fitting discrete cross-section from assortment. Convergence of the main optimization-problem objective function within the desired accuracy is a criterion of the optimal solution.

Example 2. The checking problem (16)–(20) with stability constraints calculated according to the NEN 6771 standard is analyzed in this example.

The values of the cross-sections are shown in Table S5. The cross-sections remain unchanged throughout the entire optimization process. Limits for load variations $F_{1,inf} \leq F_1 \leq F_{1,sup}$, $F_{2,inf} \leq F_2 \leq F_{2,sup}$ are unknowns of the optimization problem. The loads F_1 and F_2 represents the wind and snow loads, respectively. The snow load can't act from bottom to top, so the constraint $F_{2,min} = -10 \leq F_{2,inf} \leq 0$ was applied for load F_2 variation bound $F_{2,inf}$. The main task is to determine the load-variation bounds of the affected frame (Fig. S3.). The frame load optimization is performed using mathematical model (16)–(20). The unknowns are the load-variation bounds, $F_{1,inf}$, $F_{2,inf}$, $F_{1,sup}$, and $F_{2,sup}$, and the vector of plasticity multipliers, λ_j , $j = 1, 2, \dots, 4$.

Table S5. Values of cross-sections

Elements $k = 1, 2, \dots, s$	b , m	h , m	t , m	A_k , m ²	M_{0k} , Nm	N_{0k} , N
1, 2, 3	0,15	0,15	0,016	0,006688	88665	1571680
4, 5	0,1	0,12	0,01	0,003000	31725	705000
6, 7, 8, 9, 10, 11	0,15	0,2	0,03	0,013200	21432	3102000

Three calculation cases were investigated:

Case C1. Only strength constraints (17) are taken into account;

Case C2. Strength (17) and stiffness (20) constraints are taken into account. The following total displacement constraints are imposed: $-\infty \leq u_5 \leq 0,03 \text{ m}$, $-\infty \leq u_{14} \leq 0,0225 \text{ m}$, $-\infty \leq u_{23} \leq 0,0225 \text{ m}$;

Case C3. Strength (17) and structural constraints (19) are taken into account.

The calculation cases C1 and C2 was solved using the software MaxFopt1, whereas for the cases C3 the software coupling M0opt1 – MatrixFrame, using the sequence of operations described in Fig. S2., was used.

The calculated results for all cases described within the imposed constraints are presented in Table S6. In case C2, the total displacement u_{23} reaches the upper bound $u_{max} = 0.0225 \text{ m}$. In presented example the stability evaluation plays important role.

Table S6. Calculated results for the checking problem

Case	$F_{1,sup}$, N	$F_{2,sup}$, N/m	$F_{1,inf}$, N	$F_{2,inf}$, N/m	OF	Location of the plastic strains
C1	23679	44035	-29349	-10	97073	4, 6, 8, 23
C2	15777	26006	-23958	-10	65751	4, 6
C3	11839	19200	-14673	-10	45722	4

In case C3 the value of objective function (OF) is the smallest. The difference of OF value between C3 and C2 is 44% and between C3 and C1 is 112%. The iterative solution procedure was performed only for case C3, while the optimal solutions for cases C1 and C2 were obtained in the first iteration. Only one iteration was needed because no software coupling was used and the stiffness matrix $\mathbf{K}$ is constant in the whole optimization process.

Conclusions:

1. Practical implementation of a shakedown structural-design methodology should be based, not only on theoretical improvements and new mathematical models, but also on a close relation with existing building design practices. In this way, it is possible to avoid a gap between the theoretical methods of structural optimization and real design practices based on standards.

2. The part of the solution related to stability of main optimization problems with strength, stiffness, and stability constraints, is transferred to a design software package which conforms to implemented standards.
3. The solution procedure therefore becomes iterative.
4. The initial data for the design software become residual forces and residual displacements obtained from the solution of the optimization problem, i.e., the influence of plastic deformations is evaluated.
5. The proposed ways of solving optimization problems include the implementation of discrete-optimization principles. In this way, shakedown theory can become a generalized tool for calculation and optimization of elastic-plastic structures under different loading conditions.
6. The monotonically increasing load, moving load and load combinations relevant to civil engineering can be interpreted as separate case of repeated variable load.

4. Created Software

This chapter reviews the software modules M0opt1 and MaxFopt1 solving the nonlinear optimization problems of shakedown structures. The description of Rosen project gradient method is provided. Also the mathematical models with constants, controlling optimization process and convergence, are presented. The initial data preparation is described and the technique of constant selection is proposed. In the chapter concluded:

1. In-house software allows full control over optimization process that is not possible to do with “black box” commercial software.
2. Optimization process and obtained results highly depends on chosen constants.

5. Load Optimization of Elastic-plastic Axisymmetric Plates at Shakedown

An elastic-plastic axisymmetric steel bending plate subjected to a repeated variable load is considered in the chapter. A new algorithm for the load optimization problem combining von Mises and Tresca yield criterion based on the Rosen project gradient method is proposed. The residual displacement and residual moments influence matrixes and, and in the case of Tresca plasticity conditions, do not depend on internal forces. This feature has an important significance for the creation of the mathematical models for the load optimization problem: initially, the Tresca yield condition is applied and only in the last step is the Mises plasticity criterion applied (Fig. S6.).

5. When the stability calculation tasks are transferred to the commercial software MatrixFrame 4.1 (or similar software with implemented design standards) it is possible to focus on development of optimization algorithm rather than to concentrate to implementation of complex stability calculations (that already available in existing software). Applying created integrated iterative design methodology it is possible to incorporate variables of plastic state into commercial software i.e. the cyclic loading is evaluated (no needed to consider the separate loading history). Currently available commercial software lacks such feature. Commonly, the only particular loading history is considered in commercial software. It is possible to evaluate several loading histories and then create the envelope. But the sum of actions is not equal to repeated variable load; because the plastic zones (hinges) developed from one loading history should affect results of other loading histories, but this is not the case in commercial software. The proposed optimization methodology does not have such drawback.
6. The complexity of optimization problems grows linearly with the finite elements used in discretized model number; while the load variation bound count $p=2^m$ influence exponential growth. With the current power of personal computers it is possible to optimise structures subjected by 32 load combinations ($m=4$)

Priedai¹

A priedas. M0opt1 programos gradientų skaičiavimo paprogramės

A1. Tikslų funkcijos skaičiavimo paprogramė

A2. Tikslų funkcijos gradiento skaičiavimo paprogramė

A3. Apribojimų ir jų gradientų skaičiavimo paprogramė

B priedas. MaxFopt1 programos gradientų skaičiavimo paprogramės

B1. Tikslų funkcijos skaičiavimo paprogramė

B2. Tikslų funkcijos gradiento skaičiavimo paprogramė

B3. Apribojimų ir jų gradientų skaičiavimo paprogramė

C priedas. Publikacijų bendraautorių sutikimai teikti publikacijas disertacijos
gynimui

D priedas. Autoriaus publikacijų disertacijos tema kopijos

¹ Priedai pateikti pridėtoje elektroninėje laikmenoje

Artūras VENSKUS

PRISITAIKANČIŲ KONSTRUKCIJŲ OPTIMIZAVIMAS.
SĄSAJOS SU PROJEKTAVIMO STANDARTAIS

Daktaro disertacija

Technologijos mokslai,
statybos inžinerija (02T)

OPTIMIZATION OF SHAKEDOWN STRUCTURES
IN THE CONTEXT OF STANDARDS

Doctoral Dissertation

Technological Sciences,
Civil Engineering (02T)

2011 05 05. 10,75 sp. l. Tiražas 20 egz.
Vilniaus Gedimino technikos universiteto
leidykla „Technika“,
Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius,
<http://leidykla.vgtu.lt>
Spausdino UAB „Ciklonas“,
J. Jasinskio g. 15, 01111 Vilnius