



Vacius MALIŠAUSKAS

ELEKTROMAGNETINIO LAUKO TEORIJA

Projekto kodas

VP1-2.2-ŠMM-07-K-01-047



VGTV Elektronikos fakulteto
I pakopos studijų programų
esminis atnaujinimas

Vilnius „Technika“ 2012

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Vacius MALIŠAUSKAS

ELEKTROMAGNETINIO LAUKO TEORIJA

Aiškinamasis uždavinynas

Vilnius „Technika“ 2012

Vacius Mališauskas. Elektromagnetinio lauko teorija: aiškinamasis uždavinynas.
Vilnius: Technika, 2012. 182 p. [8,77 aut. l. 2012 06 04]

Uždavinynė pateikiamas Elektromagnetinio lauko teorijos (EMLT) praktinių užduočių rinkinys su sprendimų metodikomis 6 savarankiškiems bei 2 namų darbams atlikti. Elektromagnetinio (EM) lauko vektoriai, plokščiųjų laukų sklaidimas ir bangų poliarizacija neribotose terpėse, atspindys nuo dviejų terpių ribos ir interferencija, laukai metaliniuose bangolaidžiuose ir rezonatoriuose nagrinėjami pagal bendrus EMLT dėsnius. Elektromagnetiniai laukai atvirose apskrituose dielektriniuose, optiniuose bei girotropiniuose bangolaidžiuose tiriami pagal originalius algoritmus ir programas, sukurtas MATLAB® terpėje. Rezultatai lyginami su programų paketu CST *Microwave Studio* 10 gaunamais rezultatais. Leidinio tikslas – suteikti studentams daugiau praktinių žinių apie EM laukus įvairiose terpėse ir suformuoti šių žinių supratimą, specialiuosius taikymo gebėjimus bei įgūdžius.

Aiškinamasis uždavinynas skirtas elektronikos bakalauro studijų programų studentams, savarankiškai besimokantiems elektromagnetinio lauko teorijos, priskiriamos technologijos mokslų (T 000) sričiai bei elektros ir elektronikos inžinerijos (01 T) krypčiai.

Uždavinyną rekomendavo VGTU Elektronikos fakulteto Studijų komitetas.

Recenzavo:

doc. dr. K. V. Maceika, VGTU Aviacijos technologijų katedra,
doc. dr. T. Burokas, VGTU Elektroninių sistemų katedra

Leidinyje parengtas vykdamas projektą „VGTU Elektronikos fakulteto I pakopos studijų programų esminis atnaujinimas“. Leidinio rengimą ir leidybą finansavo Vilniaus Gedimino technikos universitetas ir Europos socialinis fondas (sutartis Nr. VP1-2.2-ŠMM-07-K-01-047).

VGTU leidyklos TECHNIKA 1327-S mokomosios metodinės literatūros knyga
<http://leidykla.vgtu.lt>

Redaktorė *Danguolė Kopūstienė*
Maketuotoja *Rasa Labutienė*

eISBN 978-609-457-147-3
doi:10.3846/1327-S

© Vacius Mališauskas, 2012
© Vilniaus Gedimino technikos universitetas, 2012

TURINYS

Išvadas	5
1. Elektromagnetinio lauko vektoriai	9
2. Plokščiųjų elektromagnetinių laukų sklaidimas neribotose terpėse	34
3. Plokščiųjų elektromagnetinių bangų poliarizacija neribotose terpėse	56
3.1. Tiesinė (plokščioji) poliarizacija	59
3.2. Apskritiminė poliarizacija	64
3.3. Elipsinė poliarizacija	67
4. Plokščiųjų elektromagnetinių bangų atspindys nuo dviejų terpių ribos ir interferencija	71
4.1. Banga krinta iš idealiojo dielektriko statmenai į idealiojo dielektriko plokštumą	74
4.2. Banga krinta iš idealiojo dielektriko statmenai į idealiojo laidininko plokštumą	79
4.3. Banga krinta iš idealiojo dielektriko nuožulniai į idealiojo laidininko plokštumą	83
5. Elektromagnetiniai laukai metaliniuose bangolaidžiuose ir rezonatoriuose	91
5.1. Laukai stačiakampiuose bangolaidžiuose	93
5.2. Laukai apskrituose bangolaidžiuose	110
5.3. Laukai bangolaidiniuose rezonatoriuose	120
6. Elektromagnetiniai laukai atviruose apskrituose bangolaidžiuose	132
6.1. Laukų modeliavimas programa MATLAB® terpėje	136
6.2. Laukų modeliavimas programų paketu CST <i>Microwave</i> <i>Studio 10</i>	147

Literatūra	162
Priedai	164
1 priedas. Elektromagnetinio lauko teorijos namų darbai	165
2 priedas. Pagrindiniai ir papildomieji SI vienetai	177
3 priedas. Svarbiausieji išvestiniai SI vienetai	179
4 priedas. SI priešdėliai ir daugikliai kartotiniams bei daliniams vienetais	182

ĮVADAS

Šis leidinys skirtas elektromagnetinio lauko teorijai nagrinėti. Jame pateikiamos praktinės užduotys ir metodikos nurodymai elektronikos bakalauro studijų programų studentams savarankiškiems bei namų darbams atlikti. Iš esmės tai yra aiškinamasis uždavinynas.

Uždavinyno tikslas – suteikti studentams daugiau praktinių žinių apie elektromagnetinius laukus įvairiose terpėse ir suformuoti šių žinių supratimą, specialiuosius taikymo gebėjimus bei įgūdžius.

Aktualumas. Elektromagnetinio lauko teorija (EMLT) reikalauja šiek tiek specifinių fizikos, matematikos, apskritai lauko teorijos žinių ir erdvinės vaizduotės. Tačiau be EMLT neįmanoma apsieiti elektroninei technikai žengiant į superaukštųjų giga- ir terahercų dažnių, super-tikslųjų nano- ir pikometrų technologijų sritis. Todėl visų elektronikos, kompiuterių inžinerijos, fizikos ir kt. studijų programų studentams būtina savarankiškai įveikti dažnai perdedamą EMLT sudėtingumą ir natūralią minėtų bei kitų jos sąvokų baimę. Tam turėtų padėti šis uždavinynas.

Mums žinomas tik vienas uždavinynas [13] panašiu pavadinimu lietuvių kalba, skirtas techniškujų universitetų studentams. Bet jame pateikiamos tik užduotys be sprendimų metodikų. Lietuviškas aiškinamasis uždavinynas [2] ir žinynai [8, 9] mažai susiję su universitetuose arba mokyklose mokomos fizikos skyriais „Elektromagnetizmas“, arba „Elektro-dinamika“. Šiam priskiriama vos ne viskas, susiję su atskirais elektriniais ir magnetiniais laukais, net elektro- ir magnetostatika. Tačiau visur itin mažai dėmesio skiriama gana aukštų dažnių tarpusavyje surištiems elektriniams ir magnetiniams laukams, kurie sklinda elektromagnetinių (EM) bangų pavidalu įvairiose terpėse. Dar rečiau braižomi ir metodiškai nagrinėjami elektromagnetiniai laukai. Be šito sunku suprasti ir praktiškai taikyti jų teoriją.

Šiame leidinyje daug dėmesio skiriama būtent EM laukams ranka arba kompiuteriu braižyti. Uždavinynas paremtas VGTU Elektronikos

fakultete sukurtos elektrodinamikos mokyklos vadovo prof. Z. Vainorio vadovėliu „Bangų elektronikos pagrindai“ [12] ir yra jo papildinys.

Uždavinyno problema – kuo paprasčiau, „ant vienos rankos pirštų“, paaiškinti ir praktiškai pritaikyti EMLT pagrindus. Parodyti, kad EM laukus nagrinėti yra naudinga, paprasta ir įdomu.

Uždaviniai. Šiame leidinyje nuosekliai pereinama nuo elektromagnetinio lauko vektorių apibūdinimo ir tarpusavio ryšių prie plokščiųjų laukų sklaidimo ir bangų poliarizacijos neribotose terpėse nagrinėjimo. Po to tiriamas plokščiųjų EM bangų sklaidimas iš vienos pusės apribotose terpėse – atspindys nuo dviejų terpių ribos ir interferencija. Vėliau braižomi ir nagrinėjami laukai iš visų pusių uždaruose metaliniuose bangolaidžiuose ir rezonatoriuose. Visa tai atliekama pagal bendrus EMLT dėsnius. Tačiau stengiamasi minimaliai taikyti jų matematines išraiškas ir kuo daugiau pabrėžti fizikinę prasmę bei praktinio taikymo galimybes.

Galiausiai tiriami EM laukai atviruose apskrituose dielektriniuose, optiniuose bei girotropiniuose bangolaidžiuose. Šie bangolaidžiai yra perspektyviausi gigahercų ir terahercų dažnių srityse. Tačiau jie iki šiol yra nepakankamai ištirti. Todėl čia šie bangolaidžiai tiriami pagal originalius algoritmus ir programas [5, 6], sukurtas MATLAB® terpėje. Rezultatai lyginami su firmos *Computer Simulation Technology* programų paketu *CST Microwave Studio 10* [6] gaunamais rezultatais. Taip studentams suteikiama galimybė savarankiškai tirti naujausius bangolaidžius, susipažinti su jų tyrimo metodikomis, kompiuterinėmis technologijomis bei problemomis.

Rezultatai. Aiškinamajame uždavinyne pateikiamos EMLT praktinės užduotys ir metodikos nurodymai suskirstyti į 6 skyrius 6 savarankiškiems bei 2 namų darbams atlikti.

Praktinių užduočių suskirstymą į skyrius ir jų skaičių nulėmė nuoseklus perėjimas nuo pagrindinių EMLT sąvokų apie lauko vektorius įvedimo iki naujausių bangolaidžių tyrimo problemų formulavimo. Tai lydi bangų sklaidimo terpių ir praktinių užduočių sudėtingėjimas. Įtakos turėjo ir VGTU Elektronikos fakultete EMLT pratyboms skiriamas gana trumpas

16 ak. val. laikas. Jų metu spėjama atlikti tik svarbiausias, dėstytojo ir studentų požiūriu, užduočių dalis. Grupinių užsiėmimų metu nenagrinėtus skyrius arba jų dalis tenka palikti savarankiškiems ir namų darbams.

EMLT modulyje numatyti 2 privalomi namų darbai, kuriuos turi individualiai atlikti visi VGTU elektronikos bakalauro studijų programų studentai. Tam uždavinyne parengti su atsarga 2 namų darbų po 78–138 nesikartojančias užduotis rinkiniai, apimantys 5 skyrius. Atliekant 2-ąjį namų darbą, galima rinktis 5-ąjį skyrių arba sujungti 5-ojo ir 6-ojo skyrių užduotis apie bangolaidžius. Visas užduotis galima išdėstyti atsitiktine tvarka kompiuteriu arba sudėtingesnes 6-ojo skyriaus užduotis su tiriamojo darbo elementais skirti individualiai labiau EMLT besidomintiems studentams. Svarbiausia – visas užduotis atlikti savarankiškai ir kūrybiškai, nekopijuojant pateiktų sprendimų. Kiekviena nubrėžta linija turi būti apgalvota, formulė – supраста, išvada – motyvuota.

Uždavinyno pranašumai. Jame gana nuosekliai ir paprastai pateikiamos EMLT praktinės užduotys ir metodikos nurodymai. Juos gali studentai ir dėstytojai naudoti auditoriniams bei savarankiškiems ir namų darbams. Tam parengta pakankamai daug užduočių. Leidinyje aprašomos gana retai pateikiamos ir visai naujos EM laukų skaičiavimo bei vaizdavimo metodikos, išryškinamos jų keliamos problemos. Tai sudaro pagrindą probleminiam grupiniam ir individualiam EMLT mokymui(si) su tiriamojo darbo elementais.

Uždavinyno perspektyvos. Tikimės, kad leidinys bus naudingas ne tik būsimiesiems bakalaurams, bet ir magistrams, daktarams bei dėstytojams, tęsiantiems VGTU elektrodinamikos mokyklos tyrimus ir tradicijas. Būtų labai malonu, jeigu šis aiškinamasis uždavinynas sudomintų ir kitų Lietuvos universitetų bei kolegijų studentus ir dėstytojus.

Rašant šį leidinį ypač pravertė ilgametis bendradarbiavimas su a.ŕa. prof. Z. Vainoriu, prof. S. Štaru, doc. K. V. Maceika, prof. V. Urbanavičiumi ir daugeliu kitų VGTU Elektronikos fakulteto dėstytojų bei mokslininkų. Per 35 metus įgyta ir nemaža EMLT bei elektrodinamikos pagrindų dėstyimo patirtis. Už ją esame dėkingi daugeliui savo buvusių studentų,

taip pat ir dabartiniams: doktorantui D. Ploniui bei magistrantui T. Sledevič. Jie kompiuteriu apskaičiavo ir nubraižė daug čia pateiktų EM laukų.

Uždavinyno parengimą ir išleidimą finansiškai parėmė Europos socialinis fondas.

Elektromagnetinio lauko teorijos aiškinamąjį uždavinyną recenzavo VGTU doc. dr. K. V. Maceika ir doc. dr. T. Burokas. Jie pateikė nemažai naudingų pastabų bei pasiūlymų, į kuriuos su dėkingumu atsižvelgėme.

Nepuoselėjame tuščių vilčių, kad šiame leidinyje nebus trūkumų ir klaidų. Todėl visada laukiame pastabų, siūlymų ir pageidavimų, į kuriuos atsižvelgsime tobulindami šį uždavinyną. Prašome mums rašyti elektroniniu paštu šiais adresais: malva.vgtu@gmail.com ir vacius.malisauskas@vgtu.lt.

Su nuoširdžia pagarba doc. dr. V. Mališauskas

1. ELEKTROMAGNETINIO LAUKO VEKTORIAI

Teorinė dalis

Elektromagnetinis laukas yra gana aukštų dažnių tarpusavyje surišti elektrinis ir magnetinis laukai. Svarbiausios jų savybės pasireiškia jiems sąveikaujant su nejudamais ir judamais elektros krūviais bei srove.

Galima išskirti dvi elektromagnetinio (EM) lauko buvimo puses. Jeigu jis yra, tai turi būti: 1) lauką sukūrusios priežastys – šaltiniai: elektros krūviai ir srovė; 2) lauko buvimo pasekmės – poveikis į nejudamus ir judamus elektros krūvius bei srovę. EM yra vektorinis laukas [12] ir jam apibūdinti įvestos dvi vektorinių dydžių poros.

Vieną porą sudaro elektrinio srauto tankio (elektrinės indukcijos) vektorius **D** ir magnetinio lauko stiprio vektorius **H**. Jie nurodo EM lauko ryšį su jo šaltiniais.

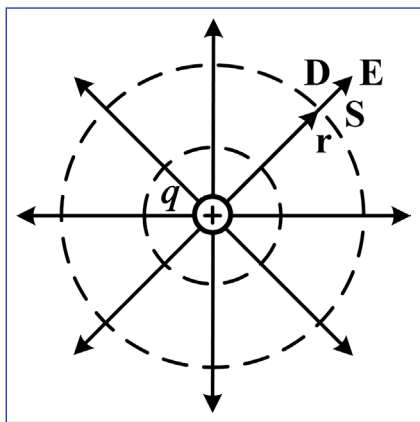
Elektrinio srauto tankio vektorius **D** aprašo elektrinio lauko sužadinimą (indukciją) elektros krūviu q – elektrinio lauko šaltiniu:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = q/\mathbf{S}(\mathbf{r}) = q\mathbf{e}_r/4\pi r^2 = q\mathbf{e}_r/4\pi r^2 \text{ C/m}^2, \quad (1.1)$$

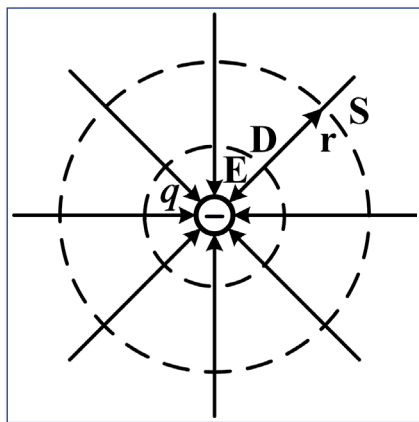
čia $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ – rutulio su taškiniu krūviu q centre paviršiaus ploto vektorius. Jo modulis lygus rutulio paviršiaus plotui $S(\mathbf{r}) = 4\pi r^2$, o kryptis yra statmena paviršiui jo išorėje; $\mathbf{r}$ – spindulys-vektorius nuo krūvio iki erdvės taško, kuriame nustatomas $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, r – spindulio-vektoriaus modulis, $\mathbf{e}_r$ – vienetinis spindulys-vektorius. Vektoriai $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ ir $\mathbf{r}$ yra lygiagretūs (1.1, 1.2 pav.).

Aplink taškinį krūvį sužadinamas potencinis elektrinis laukas, kurį galima pavaizduoti grafiškai. Tam brėžiamos lauko indukcijos, arba **D**, linijos. Šia linija vadinama įsivaizduojama kryptinga linija, kurios liestinė bet kuriame linijos taške sutampa su vektoriaus **D** kryptimi jame.

Potencinio elektrinio lauko linijos nėra uždaros – jų pradžia ir pabaiga yra skirtinguose taškuose. Taškiniai krūviai kuria elektrinius laukus, kurių linijos tolygiai koncentrinio apskritimu pasiskirsčiusiais spinduliais išeina iš šaltinio – teigiamojo krūvio (1.1 pav.) ir sueina į sankaują – neigiamąjį krūvį (1.2 pav.).



1.1 pav. Potencinis elektrinis laukas aplink teigiamąjį taškinį krūvį



1.2 pav. Potencinis elektrinis laukas aplink neigiamąjį taškinį krūvį

Krūvių tolygus arba netolygus pasiskirstymas aprašomas tūriniu ρ (C/m^3), paviršiniu ρ_s (C/m^2) arba linijiniu ρ_L (C/m) tankiu [12]. Krūvio pasiskirstymas taške laikomas tolygiu, o taškas – nykstamai mažu, palyginti su atstumu, kuriuo nuo taškinio krūvio nustatomas $\mathbf{D}$.

Magnetinio lauko stiprio vektorius $\mathbf{H}$ aprašo magnetinio lauko sužadintą elektros srovę I – magnetinio lauko šaltinį:

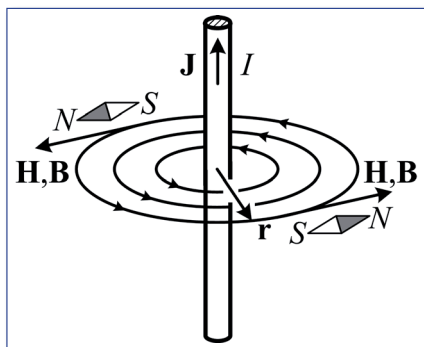
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = I/2\pi\mathbf{r} \text{ A/m}, \quad (1.2)$$

čia $\mathbf{r}$ – spindulys-vektorius nuo laidininko su srove iki erdvės taško, kuriame nustatomas $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

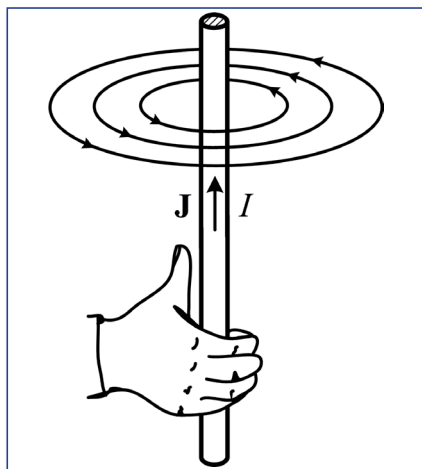
$\mathbf{H}(\mathbf{r})$ ir $\mathbf{r}$ vektoriai statmeni tarpusavyje, nes srovė I turi kryptį, nors laikoma skaliariniu dydžiu. Ją atitinka vektorius, vadinamas srovės tankiu

[12]. Tai gali būti tūrinės srovės paviršinis tankis $\mathbf{J}$ (A/m^2) arba paviršinės srovės linijinis (ilginis) tankis $\mathbf{J}_s$ (A/m). Srovės tankio vektoriaus kryptis sutampa su elektros srovės tekėjimo kryptimi.

Aplink tiesų laidininką su elektros srove I ($\mathbf{J}$) sužadinamas magnetinis laukas (1.3, 1.4 pav.), kurio linijos yra įsivaizduojami koncentriniai, laidininkui statmeni apskritimai. Todėl magnetinis laukas vadinamas sūkuriniu (rotaciniu, solenoidiniu). Toks laukas grafiškai vaizduojamas kryptingomis linijomis, t. y. kreivėmis, kurių liestinės kiekviename taške sutampa su vektoriaus $\mathbf{H}$ kryptimi. Ją rodo magnetinės rodyklės šiaurės polius N . Magnetinio lauko linijos visada yra uždaros, t. y. jų pradžia ir pabaiga yra tame pačiame taške arba galima sakyti, kad jos neturi pradžios ir pabaigos.



1.3 pav. Aplink laidininką su elektros srove sužadinamas magnetinis laukas



1.4 pav. Dešiniojo kumščio taisyklė magnetinio lauko linijų kryptčiai nustatyti

Tiesiu laidininku tekančios elektros srovės sukurto magnetinio lauko linijų kryptis nustatoma pagal dešiniojo kumščio taisyklę (1.4 pav.): jei-gu dešiniąja ranka apimsime laidininką su tekančia elektros srove taip, kad ištiestas nykštys rodytų srovės kryptį, tai kiti sugniaužti į kumštį pirštai rodytų magnetinio lauko linijų kryptis.

Kita vektorinių dydžių pora, sudaryta iš elektrinio lauko stiprio vektoriaus $\mathbf{E}$ ir magnetinio srauto tankio (magnetinės indukcijos) vektoriaus $\mathbf{B}$, aprašo EM lauko poveikį į elektros krūvius ir srovę.

Elektrinio lauko stiprio vektorius $\mathbf{E}$ aprašo elektrinio lauko poveikį į elektros krūvį q :

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{D}(r)/\varepsilon = q\mathbf{e}_r/4\pi r^2\varepsilon \text{ V/m}, \quad (1.3)$$

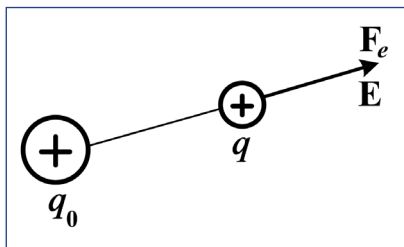
čia $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ – terpės dielektrinė skvarba, F/m; $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$, F/m – elektrinė konstanta; ε_r – terpės santykinė dielektrinė skvarba; vienetai: $\text{Cm/Fm}^2 = \text{CV/Cm} = \text{V/m}$.

Elektrinio lauko poveikio į elektros krūvį – Kulono jėga yra:

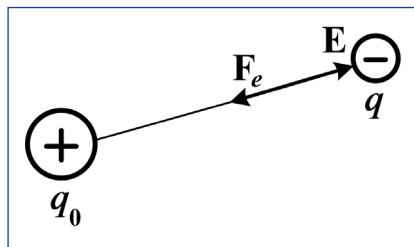
$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \text{ CV/m} = \text{N}. \quad (1.4)$$

Ji priklauso nuo krūvio q dydžio ir ženklo, elektrinio lauko stiprio $\mathbf{E}$ ir krypties, bet nepriklauso nuo krūvio greičio ir krypties.

Iš (1.4) formulės gaunama, kad elektrinio lauko stipris $\mathbf{E}$ lygus jėgai $\mathbf{F}_e$, veikiančiai vienetinį (1 C) teigiamąjį taškinį elektros krūvį q . Elektrinio lauko stiprio vektoriaus $\mathbf{E}$ kryptis sutampa su teigiamąjį krūvį q veikiančios jėgos $\mathbf{F}_e$ kryptimi (1.5 pav.) ir yra priešinga neigiamąjį krūvį veikiančios jėgos kryptiai (1.6 pav.).



1.5 pav. Elektrinio lauko poveikio jėga į teigiamąjį elektros krūvį



1.6 pav. Elektrinio lauko poveikio jėga į neigiamąjį elektros krūvį

Vienetinis taškinis krūvis q yra daug didesnio teigiamojo taškinio krūvio q_0 sukurtame gana stipriame elektriniame lauke, kurio stipris $\mathbf{E}$

kiekviename taške nepriklauso nuo krūvio q dydžio ir ženklo. Laikoma, kad vienetinis krūvis q nepakeičia nagrinėjamo elektrinio lauko savybių, o jo paties elektrinis laukas neegzistuoja. Neatsižvelgiant į tai, 1.5, 1.6 pav. atspindi ir dėsni, kad vienodų ženklų krūviai vienas kitą stumia, o priešingų ženklų – traukia.

Magnetinio srauto tankio vektorius $\mathbf{B}$ aprašo magnetinio lauko poveikį į elektros srovę I :

$$\mathbf{B}(r) = \mu \mathbf{H}(r) = \mu I / 2\pi r \quad \text{T}, \quad (1.5)$$

čia $\mu = \mu_0 \mu_r$ – terpės magnetinė skvarba, H/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m – magnetinė konstanta; μ_r – terpės santykinė magnetinė skvarba; vienetai: HA/m² = N/Am = T – tesla.

Tesla yra tankis vienalyčio magnetinio srauto, kuris veikia 1 N jėga 1 A stiprio ir 1 m ilgio elektros srovės elementą, išdėstytą statmenai laukui.

Kai elektros srovė I teka laidininku, kuris yra magnetiniame lauke, tai laukas veikia laidininką su srove Ampero jėga:

$$\mathbf{F}_A = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad \text{N}, \quad (1.6)$$

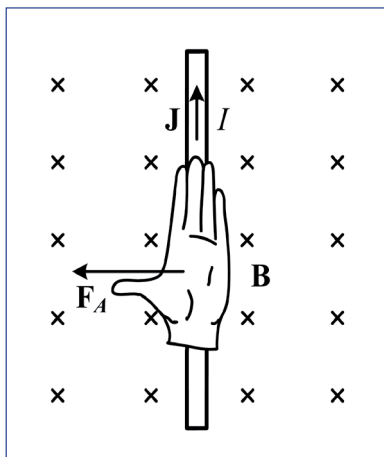
čia $\mathbf{l}$ – laidininko ilgio vektorius, nukreiptas išilgai laidininko elektros srovės I tekėjimo kryptimi; vienetai: AmN/Am = N.

Ampero jėga $\mathbf{F}_A$ visada yra statmena elektros srovės ir vektoriaus $\mathbf{B}$ kryptims. Jas nustato kairiosios rankos taisyklė: kai keturi ištiesti pirštai rodo elektros srovės I kryptį, o vektorius $\mathbf{B}$ nukreiptas stačiai į delną ($\times$ – nuo mūsų), tai stačiu kampu ištiestas nykštys rodo Ampero jėgos $\mathbf{F}_A$ kryptį (1.7 pav.). Pakeitus vektoriaus $\mathbf{B}$ kryptį priešinga ($\bullet$ – į mus), taip pat pasikeičia ir $\mathbf{F}_A$ kryptis (1.8 pav.).

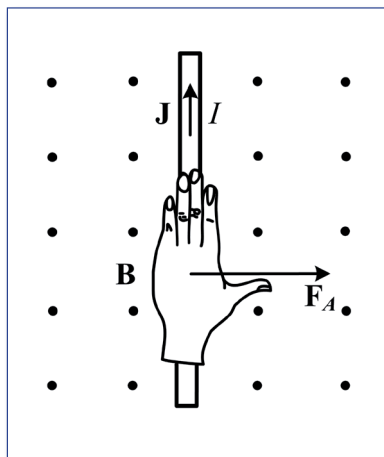
Magnetinis laukas veikia tik judantį elektros krūvį. Šis poveikis vadinamas Lorencio jėga:

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{N}, \quad (1.7)$$

čia $\mathbf{v}$ – krūvio greičio vektorius, m/s; vienetai: CmN/sAm = N.



1.7 pav. Kairiosios rankos taisyklė srovę veikiančios Ampero jėgos kryptį nustatyti, kai $\mathbf{B} (\times)$



1.8 pav. Kairiosios rankos taisyklė srovę veikiančios Ampero jėgos kryptį nustatyti, kai $\mathbf{B} (\bullet)$

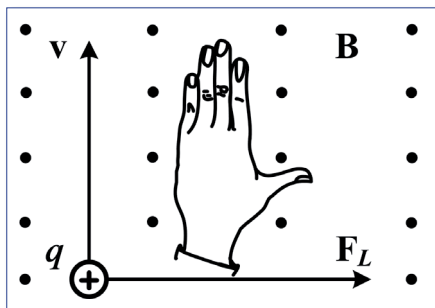
Lorenco jėga $\mathbf{F}_L$ visada yra statmena vektoriams $\mathbf{v}$ ir $\mathbf{B}$, kurie nebūtinai būna statmeni tarpusavyje. Modulis $F_L = q v B \sin \angle \mathbf{vB}$ yra didžiausias, kai krūvis juda statmenai $\mathbf{B}$ linijoms ($\angle \mathbf{vB} = 90^\circ$), ir lygus nuliui, kai krūvis juda išilgai $\mathbf{B}$ linijų ($\angle \mathbf{vB} = 0^\circ, 180^\circ$).

Pagal (1.7) formulę magnetinio srauto tankio vektoriaus modulis $B = F_L / (q v \sin \angle \mathbf{vB})$ yra lygus Lorenco jėgai, veikiančiai vienetinį teigiamąjį taškinį krūvį, judantį vienetiniu greičiu.

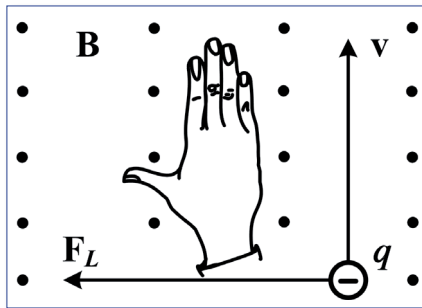
Lorenco jėgos kryptis yra tokia pati, kaip ir Ampero jėgos (1.8 pav.), nes srovę sudaro kryptingai judantys krūviai: teigiamieji juda srovės tekėjimo kryptimi, o neigiamieji – priešinga. Lorenco jėgos kryptis teigiamojo krūvio atveju nustatoma pagal kairiosios rankos taisyklę (1.9 pav.): jeigu kairioji ranka laikoma taip, kad statmenoji magnetinio srauto tankio vektoriaus $\mathbf{B}$ komponentė nukreipta į delną ($\bullet$ – į mus), o keturi ištiesti pirštai rodo teigiamojo krūvio judėjimo vienalyčiame magnetiniame lauke

kryptį, tai stačiu kampu ištiestas nykštys rodo krūvį veikiančios Lorencio jėgos kryptį.

Neigiamąją krūvį veikiančios Lorencio jėgos kryptis nustatoma pagal dešinėsios rankos taisyklę (1.10 pav.): jeigu dešinioji ranka laikoma taip, kad statmenoji magnetinio srauto tankio vektoriaus $\mathbf{B}$ komponentė nukreipta į delną ($\bullet$ – į mus), o keturi ištiesti pirštai rodo neigiamąjo krūvio judėjimo vienalyčiame magnetiniame lauke kryptį, tai stačiu kampu ištiestas nykštys rodo krūvį veikiančios Lorencio jėgos kryptį.



1.9 pav. Kairiosios rankos taisyklė teigiamąjį krūvį veikiančios Lorencio jėgos kryptį nustatyti



1.10 pav. Dešinėsios rankos taisyklė neigiamąjį krūvį veikiančios Lorencio jėgos kryptį nustatyti

Suminė elektromagnetinio lauko jėga, veikianti jame esantį elektrinį krūvį, kartais irgi vadinama Lorencio jėga, išreiškiama taip:

$$\mathbf{F}_{\Sigma} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})). \quad (1.8)$$

Apibendrinant verta įsidėmėti, kad elektriniai laukai būna pastovieji ir kintamieji, potenciniai ir sukuriniai (rotaciniai, solenoidiniai). Potencinių pastoviųjų ir kintamųjų elektrinių laukų šaltiniai yra atitinkamai pastovieji ir kintamieji teigiamieji krūviai, o sandaugos – neigiamieji krūviai. Šių laukų linijos nėra uždaros. Jos išeina iš teigiamųjų ir sueina į neigiamuosius krūvius. Sukurinių elektrinių laukų, kurie būna tik kintamieji, šaltiniai yra kintamieji magnetiniai laukai. Sukurinių elektrinių laukų linijos visada yra uždaros.

Magnetiniai laukai būna pastovieji ir kintamieji, bet visada yra sukuriniai (rotaciniai, solenoidiniai). Jų šaltiniai yra pastovieji magnetai, pastoviosios ir kintamosios elektros srovės. Magnetinių laukų linijos visada yra uždaros.

EM būna tik gana aukštų dažnių kintamieji laukai. Šių laukų linijų ir vektorių momentines kryptis galima paprastai nustatyti, remiantis dažniausiai dešiniojo kumščio, kartais kairiosios rankos taisyklėmis. Taigi EMLT kokybiiniu požiūriu galima nagrinėti praktiškai „ant vienos rankos pirštų“.

Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

- 1.1.** *Užrašykite tūrinio, paviršinio ir linijinio krūvių ryšio su jų tankiais diferencialines bei integralines lygtis ir jų išraiškas, kai tankiai nekinta.*

Sprendimas: [12].

- 1.2.** *Užrašykite tūrinės srovės ir jos paviršinio tankio bei paviršinės srovės ir jos linijinio tankio ryšių diferencialines bei integralines lygtis ir jų išraiškas, kai tankiai nekinta.*

Sprendimas: [12].

- 1.3.** *Iš Ampero jėgos formulės (1.6) išveskite Lorencio jėgos išraišką (1.7) ir nurodykite šių jėgų ryšį [8].*

Sprendimas:

$$\mathbf{F}_A = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = qNS\mathbf{v}(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = qNSl(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = qNV(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = nq(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = n\mathbf{F}_L.$$

Čia $I = qNSv$ – laidininku tekančios srovės stipris. Jis yra tiesiog proporcingas kryptingai judančių krūvių dydžiui q , jų koncentracijai (skaičiui tūrio vienetu) N , laidininko skerspjūvio plotui S ir krūvių judėjimo greičio vektoriaus $\mathbf{v}$ moduliui v . Jo ir laidininko ilgio vektoriaus $\mathbf{l}$ sandauga $v\mathbf{l} = l\mathbf{v}$. Sandauga Sl yra lygi laidininko atkarpos tūriui V . Sandauga NV lygi krūvių skaičiui n laidininke.

Taigi laidininką su srove veikiančią Ampero jėgą galima nagrinėti kaip vektorinę sumą Lorencio jėgų, veikiančių laidininke judančius krūvius – $\mathbf{F}_A = n\mathbf{F}_L$. Ir atvirkščiai – $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_A/n$.

1.4. Išveskite ir pavaizduokite taškinio krūvio $q_T = 10^{-6}$ C elektrinio srauto tankio D_T ir lauko stiprio E_T priklausomybes nuo spindulio r ore. Apskaičiuokite D_T ir E_T ore atstumais $a = 1$ cm ir $b = 1$ m nuo taškinio krūvio [7].

Sprendimas: Tebūnie taškinis krūvis q_T įsivaizduojamo rutulio su spinduliu r centre (1.11 pav.). Dėl krūvio simetrijos rutulyje elektrinio lauko linijos bus tolygiai paskirstytos tiesės, einančios iš rutulio centro spindulių kryptimis. Bendriausiu atveju elektrinis srautas per uždara paviršių randamas pagal Gauso teoremą (III integralinę Maksvelo lygtį) [12]:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = q_\Sigma. \quad (1.9)$$

Ji reiškia, kad elektrinis srautas per uždara paviršių yra lygus šio paviršiaus apgaubtam suminiam krūviui.

Taškinio krūvio atveju elektrinio srauto tankis D_T yra vienodas visame įsivaizduojamo rutulio paviršiuje. Todėl galima D_T iškelti prieš integralo ženklą ir belieka rasti rutulio paviršiaus plotą S . Taip gauta q_T formulė (1.10), išraiškos $D(r)$ (1.1), $D_T(r)$ (1.11) ir formulės $E(r)$ (1.3), $E_T(r)$ (1.12):

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D_T dS = D_T \oint_S dS = D_T S = D_T 4\pi r^2 = q_T, \quad (1.10)$$

$$D_T(r) = q_T / 4\pi r^2, \quad (1.11)$$

$$E_T(r) = D_T(r) / \varepsilon = q_T / 4\pi r^2 \varepsilon. \quad (1.12)$$

Taigi $D_T(r)$ ir $E_T(r)$ taškinio krūvio vietoje, kai $r = 0$, teoriškai yra be galo dideli (∞) ir mažėja atvirkščiai proporcingai didėjant r^2 (1.11 pav.). Fiziškai $D_T(0)$ ir $E_T(0)$ negali būti be galo dideli. Teorija ir realybė neatitinka

todėl, kad nykstamai mažas taškas be tūrio, paviršiaus bei matmenų yra teorinė abstrakcija ir realiai neegzistuoja.

Panaudojus lygtis (1.11), (1.12), kai $r = a = 1 \text{ cm}$, $r = b = 1 \text{ m}$, ore gaunama:

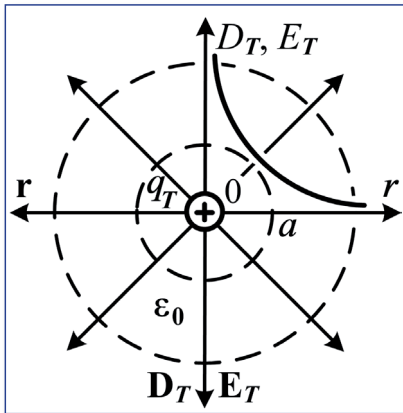
$$D_T(a) = q_T / 4\pi a^2 = 10^{-6} / 4\pi \cdot (10^{-2})^2 \approx 7,96 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^2,$$

$$D_T(b) = q_T / 4\pi b^2 = 10^{-6} / 4\pi \cdot 1^2 \approx 7,96 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2,$$

$$E_T(a) = q_T / 4\pi a^2 \varepsilon_0 = 10^{-6} \cdot 36\pi / (4\pi \cdot (10^{-2})^2 \cdot 10^{-9}) = 9 \cdot 10^7 \text{ V/m},$$

$$E_T(b) = q_T / 4\pi b^2 \varepsilon_0 = 10^{-6} \cdot 36\pi / (4\pi \cdot 1^2 \cdot 10^{-9}) = 9 \cdot 10^3 \text{ V/m}.$$

Čia gautas elektrinio lauko stipris $E_T(a)$ yra 30 kartų didesnis, palyginti net su ribiniu stipriu orui $E_r = 30 \text{ kV/cm}$, kai elektrinis laukas jonizuoja ir pramuša orą.



1.11 pav. Taškinio krūvio kuriamo elektrinio lauko skaičiavimas

Tai paaiškinama pernelyg mažu atstumu $r = a = 1 \text{ cm}$ net nuo nykstamai mažo taško. 10^4 kartų už $E_T(a)$ mažesnis $E_T(b)$ vis tiek 18 kartų viršija didžiausią leidžiamą pagal Lietuvos higienos normą [4] stiprį 500 V/m dažnių ruože $\Delta f = 0,01\text{--}2,99 \text{ MHz}$, esant 5 min. poveikiui per pamainą darbo vietose. Didėjant dažniui ir poveikio trukmei leidžiamas elektrinio lauko stipris dar mažėja.

1.5. Išveskite ir pavaizduokite be galo ilgo, plono, tolygiai įelektrinto valo, kurio linijinis krūvio tankis $\rho_{L_1} = 10^{-6} \text{ C/m}$, elektrinio srauto tankio D_L ir lauko stiprio E_L priklausomybes nuo spindulio r ore. Apskaičiuokite D_L ir E_L ore atstumais $a = 1 \text{ cm}$ ir $b = 1 \text{ m}$ nuo linijinio krūvio [7].

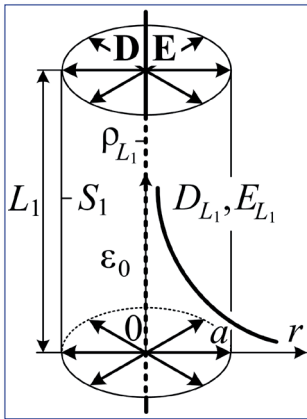
Sprendimas: Įelektrintas valas įsivaizduojamas esąs cilindro su spinduliu, pvz., $r = a$ centre (1.12 pav.). Dėl valo simetrijos cilindre elektrinio lauko linijos bus tiesės, einančios nuo valo tolygiai pagal perimetrą paskirstytų cilindro spindulių kryptimis. Elektrinis srautas per uždarą cilindro paviršių randamas pagal Gauso teoremą (1.9), taikomą vienetinio ilgio $L_1 = 1 \text{ m}$ valo ir cilindro atkarpai.

Srautas per cilindro apačią ir viršų lygus nuliui, nes elektrinio lauko linijos yra lygiagretės jiems, taigi nekerta jų. Tačiau jos yra statmenos šoniniam cilindro paviršiui. Tolygiai paskirstyto linijinio krūvio atveju elektrinio srauto tankis D_{L_1} yra vienodas visame šoniniame cilindro paviršiuje. Todėl galima D_{L_1} iškelti prieš integralo ženklą ir rasti vienetinio ilgio cilindro šoninio paviršiaus plotą S_1 . Sudauginus D_{L_1} ir S_1 , gaunamas elektrinis srautas per šoninį cilindro paviršių. Vienetinio ilgio valo krūvis q_{L_1} gaunamas sudauginant tolygiai paskirstyto krūvio linijinį tankį ρ_{L_1} ir valo ilgį $L_1 = 1 \text{ m}$:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \oint_{S_1} D_{L_1} dS_1 = D_{L_1} \oint_{S_1} dS_1 = D_{L_1} S_1 = \\ &= D_{L_1} 2\pi r L_1 = D_{L_1} 2\pi r = q_\Sigma = q_{L_1} = \rho_{L_1} L_1 = \rho_{L_1}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$D_{L_1}(r) = \rho_{L_1} / 2\pi r, \quad (1.14)$$

$$E_{L_1}(r) = D_{L_1}(r) / \varepsilon = \rho_{L_1} / 2\pi r \varepsilon. \quad (1.15)$$



1.12 pav. Valo krūvio kuriamo elektrinio lauko skaičiavimas

Taigi vienetinio ilgio valo krūvis q_{L_1} yra lygus jo linijiniam tankiui ρ_{L_1} . Be to, $D_{L_1}(r)$ ir $E_{L_1}(r)$ įelektrinto valo vietoje, kai $r = 0$, teoriškai yra be galo dideli (∞) ir mažėja atvirkščiai proporcingai didėjant r (1.12 pav.). Fiziškai $D_{L_1}(0)$ ir $E_{L_1}(0)$ negali būti be galo dideli. Teorija ir realybė neatitinka todėl, kad be galo ilgas, plonas valas be tūrio, paviršiaus bei skerspjūvio matmenų yra teorinė abstrakcija ir realiai neegzistuoja. Tačiau valo linijinio krūvio elektrinis laukas silpsta lėčiau (proporcingai $1/r$) negu 1.4 užduoties taškinio krūvio ($1/r^2$), tostant nuo jų.

Panaudojus lygtis (1.14), (1.15), kai $r = a = 1 \text{ cm}$, $r = b = 1 \text{ m}$, ore gaunama:

$$D_{L_1}(a) = \rho_{L_1} / 2\pi a = 10^{-6} / 2\pi \cdot 10^{-2} \approx 0,159 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^2,$$

$$D_{L_1}(b) = \rho_{L_1} / 2\pi b = 10^{-6} / 2\pi \cdot 1 \approx 0,159 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2,$$

$$E_{L_1}(a) = \rho_{L_1} / 2\pi a \epsilon_0 = 10^{-6} \cdot 36\pi / (2\pi \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-9}) = 18 \cdot 10^5 \text{ V/m},$$

$$E_{L_1}(b) = \rho_{L_1} / 2\pi b \epsilon_0 = 10^{-6} \cdot 36\pi / 2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-9} = 18 \cdot 10^3 \text{ V/m}.$$

Čia gautas elektrinio lauko stipris $E_{L_1}(a)$ yra tik $\sim 1,67$ karto mažesnis už ribinį stiprį orui $E_r = 30 \text{ kV/cm}$. Tai paaiškinama pernelyg mažu

atstumu $r = a = 1$ cm net nuo nykstamai plono valo. 10^2 kartų už $E_{L_1}(a)$ mažesnis $E_{L_1}(b)$ vis tiek 36 kartus viršija didžiausią leidžiamą pagal higienos normą [4] elektrinio lauko stiprį.

Taškinio (1.4 užd.) ir linijinio (1.5 užd.) krūvių elektrinių laukų parametrai susieti lygybėmis:

$$q_T = q_{L_1}, \quad D_T(a) = 50D_{L_1}(a), \quad D_T(b) = 0,5D_{L_1}(b),$$

$$E_T(a) = 50E_{L_1}(a), \quad E_T(b) = 0,5E_{L_1}(b).$$

Taigi gana artimas taškinio krūvio laukas yra 50 kartų stipresnis už linijinio krūvio lauką, o pakankamai tolimas taškinio krūvio laukas – 2 kartus silpnesnis už linijinio krūvio lauką. Tai paaiškinama tuo, kad taškinio krūvio laukas plinta visomis kryptimis trimatės terpės rutulio ribose, o linijinio krūvio – dvimatės terpės cilindro ribose.

1.6. Išveskite ir pavaizduokite polietileno rutulio, kurio visas tūris tolygiai įelektrintas, elektrinio srauto tankio D_{vp} bei lauko stiprio E_{vp} priklausomybes nuo spindulio r polietilene ir ore. Apskaičiuokite D_{vp} ir E_{vp} atstumais $a = 1$ cm ir $b = 1$ m nuo rutulio centro. Polietileno santykinė dielektrinė skvarba $\epsilon_{rp} = 2,25$, spindulys $a = 1$ cm, tūrinis krūvio tankis $\rho_{vp} = 1$ C/m³ [12].

Sprendimas: Tūrinio krūvio atveju elektrinio srauto tankis D_{vp} yra vienodas visame polietileno rutulio paviršiuje. Todėl Gauso teoremoje (1.9) galima D_{vp} iškelti prieš integralo ženklą ir rasti rutulio paviršiaus plotą S_p . Taip gauta q_{vp} formulė (1.16), kai $r \leq a$:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_{S_p} D_{vp} dS_p = D_{vp} \oint_{S_p} dS_p = D_{vp} S_p = D_{vp} 4\pi r^2 = q_{vp}. \quad (1.16)$$

Elektrinio krūvio tankis ρ_{vp} yra vienodas rutulio tūryje V_p . Todėl Gauso teoremoje (1.9) galima ρ_{vp} iškelti prieš integralo ženklą, rasti V_p ir rutulyje sukaupto krūvio q_{vp} išraišką bei dydį, kai $r \leq a$:

$$\int_{V_p} \rho_{Vp} dV_p = \rho_{Vp} \int_{V_p} dV_p = \rho_{Vp} V_p = \rho_{Vp} 4\pi r^3/3 = q_{Vp}, \quad (1.17)$$

$$q_{Vp} = \rho_{Vp} 4\pi a^3/3 = 1 \cdot 4\pi \cdot (10^{-2})^3/3 \approx 4,19 \cdot 10^{-6} \text{ C, kai } r = a = 1 \text{ cm.}$$

Sulyginus formules (1.16) ir (1.17), gaunama $D_{Vp}(r)$ polietilene išraiška, kai $r \leq a$:

$$D_{Vp} 4\pi r^2 = \rho_{Vp} 4\pi r^3/3 = q_{Vp}, \quad D_{Vp}(r) = \rho_{Vp} 4\pi r^3/(3 \cdot 4\pi r^2) = \rho_{Vp} r/3. \quad (1.18)$$

Rutulio išorėje (ore) galima taikyti taškinio krūvio sampratą. Sulyginus formules (1.16), (1.17), į pastarąją įrašius $r = a$, gaunama:

$$D_{Vo} 4\pi r^2 = \rho_{Vp} 4\pi a^3/3 = q_{Vp}, \text{ kai } r \geq a,$$

$$D_{Vo}(r) = \rho_{Vp} 4\pi a^3/3 \cdot 4\pi r^2 = \rho_{Vp} a^3/3r^2. \quad (1.19)$$

Kai $r = a$, išraiškos (1.18) ir (1.19) susilygina. Elektrinio srauto tankis ant polietileno ir oro ribos bus $D_{Vpo}(a) = \rho_{Vp} a/3$ (1.13 pav.).

Įvertinus (1.3), gaunama $E = D/\varepsilon$. Tačiau polietileno ε_p ir oro ε_0 dydžiai yra skirtingi. Juos reikia įvertinti elektrinio lauko stiprių polietileno rutulyje ir ore išraiškose:

$$E_{Vp}(r) = D_{Vp}(r)/\varepsilon_{rp}\varepsilon_0 = \rho_{Vp} r/3\varepsilon_{rp}\varepsilon_0, \quad r \leq a, \quad (1.20)$$

$$E_{Vo}(r) = D_{Vo}(r)/\varepsilon_0 = \rho_{Vp} a^3/3r^2\varepsilon_0, \quad r \geq a. \quad (1.21)$$

Kai $r = a$, išraiškos (1.20) ir (1.21) nesusilygina. Elektrinio lauko stipris ant polietileno ir oro ribos iš polietileno pusės bus $E_{Vp}(a) = \rho_{Vp} a/3\varepsilon_{rp}\varepsilon_0$, o iš oro pusės – $E_{Vo}(a) = \rho_{Vp} a/3\varepsilon_0$, t. y. pastarasis bus $\varepsilon_{rp} = 2,25$ karto didesnis (1.13 pav.).

Belieka apskaičiuoti D_{Vp} , D_{Vo} , ir E_{Vp} , E_{Vo} priklausomybes nuo r bei konkrečias $D_{Vp}(a)$, $E_{Vp}(a)$, $E_{Vo}(a)$ reikšmes:

$$D_{Vp}(r) = \rho_{Vp} r/3 = 1 \cdot r/3 \approx 0,333 \cdot r \text{ C/m}^2,$$

$$D_{Vp}(a) \approx 0,333 \cdot a \approx 0,333 \cdot 10^{-2} \approx 33,3 \cdot 10^{-4} \text{ C m}^2 > \\ > D_T(a) \approx 7,96 \cdot 10^{-4} \text{ C m}^2, \quad (1.4 \text{ užd.})$$

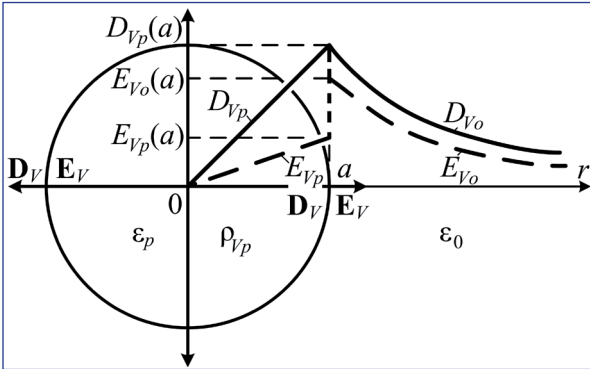
$$D_{Vo}(r) = \rho_{Vp} a^3 / 3r^2 = 1 \cdot (10^{-2})^3 / 3r^2 \approx 0,333 \cdot 10^{-6} / r^2 \text{ C/m}^2, \quad (1.22)$$

$$E_{Vp}(r) = \rho_{Vp} r / 3\epsilon_{rp}\epsilon_0 = 1 \cdot r \cdot 36\pi / (3 \cdot 2,25 \cdot 10^{-9}) \approx 16,8 \cdot 10^9 \cdot r \text{ V/m},$$

$$E_{Vp}(a) \approx 16,8 \cdot 10^9 \cdot a \approx 16,8 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2} \approx 16,8 \cdot 10^7 \text{ V m} > \\ > E_T(a) = 9 \cdot 10^7 \text{ V/m}, \quad (1.4 \text{ užd.})$$

$$E_{Vo}(r) = \rho_{Vp} a^3 / 3r^2 \epsilon_0 = 1 \cdot (10^{-2})^3 \cdot 36\pi / (3r^2 \cdot 10^{-9}) \approx \\ \approx 37,7 \cdot 10^3 / r^2 \text{ V/m}, \quad (1.23)$$

$$E_{Vo}(a) \approx 37,7 \cdot 10^3 / a^2 \approx 37,7 \cdot 10^3 / (10^{-2})^2 \approx 37,7 \cdot 10^7 \text{ V/m}.$$



1.13 pav. Rutulio krūvio kuriamo elektrinio lauko skaičiavimas

Taigi polietileno rutulyje $D_{Vp}(r)$ ir $E_{Vp}(r)$ didėja nuo nulio centre tiesiniu dėsniu išilgai spindulio r iki rutulio paviršiaus. Čia $D_{Vp}(r)$ tampa lygus $D_{Vp}(a)$, nuo kurio $D_{Vo}(r)$ sparčiai mažėja atvirkščiai proporcingai, didėjant r^2 . Tuo tarpu $E_{Vp}(r)$ ant rutulio paviršiaus pasiekia $E_{Vp}(a)$ reikšmę. Pastaroji ten pat šuoliu padidėja $\epsilon_{rp} = 2,25$ karto iki $E_{Vo}(a)$ reikšmės. Tai

atitinka ribines sąlygas rutulio paviršiuje ant polietileno ir oro ribos [12]. Nuo $E_{Vo}(a)$ reikšmės ant rutulio paviršiaus $E_{Vo}(r)$ sparčiai mažėja atvirkščiai proporcingai, didėjant r^2 (1.13 pav.).

Čia gautos $D_{Vp}(a)$, $E_{Vp}(a)$, $E_{Vo}(a)$ reikšmės yra tik kelis kartus didesnės už 1.4 užduoties sprendime gautas atitinkamas $D_T(a)$, $E_T(a)$ reikšmes, esant tam pačiam atstumui $r = a = 1$ cm nuo rutulių centrų. Tai paaiškina tu, kad, kai krūvio tankis polietileno rutulyje atrodo gana mažas – $\rho_{Vp} = 1$ C/m³, jame sukauptas krūvis $q_{Vp} \approx 4,19 \cdot 10^{-6}$ C yra tik apie 4 kartus didesnis už taškinį krūvį $q_T = 10^{-6}$ C. Neatsižvelgiant į tai, elektrinių laukų stipriai abiem atvejais gaunami nerealiai dideli dėl palyginti mažų atstumų nuo krūvių.

Įelektrinto polietileno rutulio sukurtas elektrinis laukas ore atstumu $r = b = 1$ m nuo rutulio centro apibūdinamas parametrais, kurie apskaičiuojami pagal formules (1.22), (1.23):

$$D_{Vo}(b) \approx 0,333 \cdot 10^{-6} / b^2 \approx 0,333 \cdot 10^{-6} / 1^2 \approx 33,3 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2,$$

$$E_{Vo}(b) \approx 37,7 \cdot 10^3 / b^2 \approx 37,7 \cdot 10^3 / 1^2 \approx 37,7 \cdot 10^3 \text{ V/m}.$$

Šie parametrai taip pat apie 4 kartus didesni už atitinkamus 1.4 užduoties sprendime gautus parametrus ir dar labiau viršija didžiausią leidžiamą pagal higienos normą [4] elektrinio lauko stiprį.

1.7. Išveskite kaip ir 1.6, tik stiklo rutulio, kurio santykinė dielektrinė skvarba ϵ_{rs} , spindulys a , elektrinis krūvis q_{Vs} [12].

Atsakymas: $D_{Vs}(r) = q_{Vs}r / 4\pi a^3$, $E_{Vs}(r) = q_{Vs}r / 4\pi a^3 \epsilon_{rs} \epsilon_0$, kai $r \leq a$,
ir $D_{Vo}(r) = q_{Vs} / 4\pi r^2$, $E_{Vo}(r) = q_{Vs} / 4\pi r^2 \epsilon_0$, kai $r \geq a$.

1.8. Išveskite ir pavaizduokite sferos, kurios visas paviršius tolygiai įelektrintas, elektrinio srauto tankio D_S bei lauko stiprio E_S priklausomybes nuo spindulio r viduje ir ore. Apskaičiuokite D_S ir E_S atstumais $a = 1 \text{ cm}$ ir $b = 1 \text{ m}$ nuo sferos centro. Sferos spindulys $a = 1 \text{ cm}$, paviršinis krūvio tankis $\rho_S = 10^{-3} \text{ C/m}^2$ [12].

Sprendimas: Sferos viduje krūvio q_S nėra. Taigi iš Gauso teoremos (1.9) gaunama, kad elektrinio srauto tankis bei lauko stipris viduje, kai $r \leq a$, yra lygūs nuliui. Ore šie dydžiai randami, taikant sferai taškinio krūvio sampratą ir formules (1.19), (1.21):

$$D_{S_0}(r) = q_S / 4\pi r^2 = \rho_S S / 4\pi r^2 = \rho_S 4\pi a^2 / 4\pi r^2 = \rho_S a^2 / r^2, \quad (1.24)$$

$$E_{S_0}(r) = q_S / 4\pi r^2 \epsilon_0 = \rho_S a^2 / r^2 \epsilon_0, \quad \text{kai } r \geq a. \quad (1.25)$$

Įstačius ρ_S ir a skaitines reikšmes, gaunama:

$$D_{S_0}(r) = \rho_S a^2 / r^2 = 10^{-3} \cdot (10^{-2})^2 / r^2 = 10^{-7} / r^2 \text{ C/m}^2, \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} E_{S_0}(r) &= \rho_S a^2 / r^2 \epsilon_0 = 10^{-3} \cdot (10^{-2})^2 \cdot 36\pi / (r^2 \cdot 10^{-9}) \approx \\ &\approx 11,3 \cdot 10^3 / r^2 \text{ V/m}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ant sferos paviršiaus S , kai $r = a$, gaunama:

$$D_S(a) = \rho_S a^2 / a^2 = \rho_S = 10^{-3} \text{ C/m}^2,$$

$$E_S(a) = \rho_S a^2 / a^2 \epsilon_0 = \rho_S / \epsilon_0 = 10^{-3} \cdot 36\pi / 10^{-9} \approx 11,3 \cdot 10^7 \text{ V/m},$$

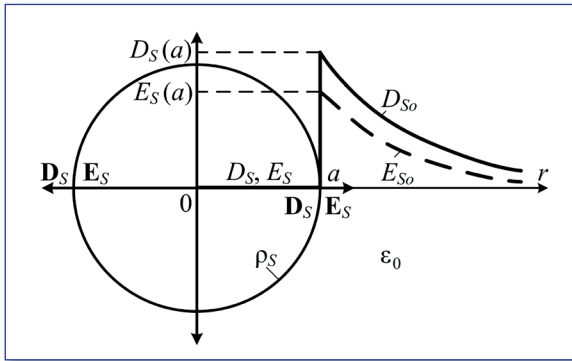
$$q_S = \rho_S S = \rho_S \cdot 4\pi a^2 = 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot (10^{-2})^2 \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

Taigi sferos viduje elektrinio lauko nėra – $D_{S_v}(r) = E_{S_v}(r) = 0$, paviršiuje jo srauto tankis yra lygus paviršiniam krūvio tankiui – $D_S(a) = \rho_S$, o ore $D_{S_0}(r)$ ir $E_{S_0}(r)$ sparčiai mažėja nuo $D_S(a)$ ir $E_S(a)$ reikšmių atvirkščiai proporcingai, didėjant r^2 (1.14 pav.).

Įelektrintos sferos sukurtas elektrinis laukas ore atstumu $r = b = 1$ m nuo centro apibūdinamas parametrais, kurie apskaičiuojami pagal formules (1.26), (1.27):

$$D_{So}(b) = 10^{-7}/b^2 = 10^{-7}/1^2 = 10^{-7} \text{ C/m}^2,$$

$$E_{So}(b) \approx 11,3 \cdot 10^3/b^2 \approx 11,3 \cdot 10^3/1^2 \approx 11,3 \cdot 10^3 \text{ V/m}.$$



1.14 pav. Sferos krūvio kuriamo elektrinio lauko skaičiavimas

Šios užduoties sprendinių skaitinės reikšmės yra tarp 1.4 ir 1.6 užduočių sprendinių reikšmių:

$$D_T < D_S < D_{Vp}, E_T < E_S < E_{Vp} \text{ ir } q_T < q_S < q_{Vp}.$$

Todėl galioja ir 1.4, 1.6 užduočių sprendimuose suformuluotos išvados.

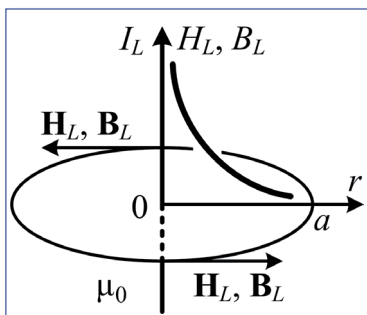
1.9. Išveskite kaip ir 1.8, esant paviršiniam krūviui q_S [12].

Atsakymas: $D_{Sv}(r) = E_{Sv}(r) = 0$, kai $r \leq a$, ir $D_{So}(r) = q_S/4\pi r^2$, $E_{So}(r) = q_S/4\pi r^2 \epsilon_0$, kai $r \geq a$.

1.10. Išveskite ir pavaizduokite be galo ilgo, plono, tiesaus laidininko, kuriuo teka srovė $I_L = 100 \text{ mA}$, magnetinio lauko stiprio H_L ir srauto tankio B_L priklausomybes nuo spindulio r ore. Apskaičiuokite H_L ir B_L atstumais $a = 1 \text{ cm}$ ir $b = 1 \text{ m}$ nuo laidininko [7].

Sprendimas: Aplink be galo ilgą, ploną, tiesų laidininką su srove I_L sužadinamas magnetinis laukas (1.15 pav.), kurio linijos yra įsivaizduojami koncentriniai, laidininkui statmeni apskritimai. Bendriausiu atveju tokio lauko stipris H randamas pagal Ampero dėsnį (I integralinės Maksvelo lygties dalį laidžio srovei) [12]:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{L} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = I. \quad (1.28)$$



1.15 pav. Plono laidininko srovės kuriamo magnetinio lauko skaičiavimas

Ji reiškia, kad darbas, atliekamas H stiprio magnetiniame lauke, perkeltiant vienetinį teigiamąjį krūvį uždaru keliu L , yra lygus lauką sukūrusiai srovei I . Lygtyje (1.28) integravimo kelias L turi aprėpti srovę, o jo forma neturi reikšmės. Tarkime, kad šis kelias sutampa su lauko linijų apskritimais. Išilgai jų magnetinio lauko stipris nekinta, todėl galima H iškelti prieš integralo ženklą ir belieka rasti L – apskritimo perimetrą. Taip gauta I_L formulė (1.29), išraiškos $H(r)$ (1.2), $H_L(r)$ (1.30) ir formulės $B(r)$ (1.5), $B_L(r)$ (1.31):

$$\oint_L \mathbf{H}_L d\mathbf{L} = \oint_L H_L dL = H_L \oint_L dL = H_L L = H_L \cdot 2\pi r = I_L, \quad (1.29)$$

$$H_L(r) = I_L / 2\pi r, \quad (1.30)$$

$$B_L(r) = \mu H_L(r) = \mu I_L / 2\pi r. \quad (1.31)$$

Taigi laidininko vietoje, kai $r = 0$, $H_L(r)$ ir $B_L(r)$ teoriškai yra be galo dideli (∞) ir toliau mažėja atvirkščiai proporcingai, didėjant r (1.15 pav.). Fiziškai $H_L(0)$ ir $B_L(0)$ negali būti be galo dideli. Teorija ir realybė neatitinka todėl, kad be galo ilgas, plonas laidininkas be tūrio, paviršiaus bei skerspjuvio matmenų yra teorinė abstrakcija ir realiai neegzistuoja.

Panaudojus išraiškas (1.30) ir (1.31), kai $r = a = 1 \text{ cm}$ ir $r = b = 1 \text{ m}$, ore gaunama:

$$H_L(a) = I_L / 2\pi a = 100 \cdot 10^{-3} / 2\pi \cdot 10^{-2} \approx 1,59 \text{ A/m},$$

$$H_L(b) = I_L / 2\pi b = 100 \cdot 10^{-3} / 2\pi \cdot 1 \approx 15,9 \cdot 10^{-3} \text{ A/m},$$

$$B_L(a) = \mu_0 I_L / 2\pi a = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^{-3} / 2\pi \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T},$$

$$B_L(b) = \mu_0 I_L / 2\pi b = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^{-3} / 2\pi \cdot 1 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ T}.$$

Čia gautas magnetinio lauko stipris $H_L(a)$ yra mažas, palyginti su didžiausiu leidžiamu pagal higienos normą [4] stipriu 50 A/m dažnių ruože $\Delta f = 0,01\text{--}2,99 \text{ MHz}$, esant 5 min. poveikiui per pamainą darbo vietose. Tačiau, didėjant dažniui ir poveikio trukmei, leidžiamas magnetinio lauko stipris mažėja ir $H_L(a)$ gali viršyti mažiausią leidžiamą normą $0,3 \text{ A/m}$. $B_L(a)$ viršija gyvenamoje aplinkoje leidžiamas normas ($0,016\text{--}1,8 \text{ }\mu\text{T}$).

1.11. Išveskite ir pavaizduokite laidininko, kuriuo teka tolygiai skerspjuvyje paskirstyta srovė, magnetinio lauko stiprio H_V bei srauto tankio B_V priklausomybes nuo spindulio r laidininke ir ore. Apskaičiuokite H_V ir B_V atstumais $a = 1 \text{ cm}$ ir $b = 1 \text{ m}$ nuo centro. Laidininko skersmuo $d = 1 \text{ cm}$, srovės tankis $J_V = 1 \text{ A/m}^2$ [12].

Sprendimas: Laidininko viduje paimamas bet koks apskritimas, kurio perimetras L sutampa su magnetinio lauko vienodo stiprio H_V linijomis.

Taikant jam Ampero dėsnį (1.28) įvertinama, kad H_V yra vienodas išilgai apskritimo, o tūrinės srovės tankis J_V yra vienodas visame laidininko skerspjūvio paviršiuje S . Todėl galima H_V ir J_V išskelti prieš integralų ženklus, rasti L , S ir srovės I_V laidininke išraišką bei dydį:

$$\oint_L \mathbf{H}_V d\mathbf{L} = \oint_L H_V dL = H_V \oint_L dL = H_V L = H_V 2\pi r = I_V, \quad (1.32)$$

$$\int_S \mathbf{J}_V d\mathbf{S} = \int_S J_V dS = J_V \int_S dS = J_V S = J_V \pi r^2 = I_V, \quad r \leq d/2, \quad (1.33)$$

$$I_V = J_V \pi r^2 = J_V \pi d^2 / 4 = 1 \cdot \pi \cdot (10^{-2})^2 / 4 \approx 0,079 \cdot 10^{-3} \text{ A, kai } r = d/2.$$

Sulyginus formules (1.32) ir (1.33), gaunama $H_V(r)$ laidininke išraiška:

$$H_{VI} 2\pi r = J_V \pi r^2 = I_V, \text{ kai } r \leq d/2, \quad H_{VI}(r) = J_V \pi r^2 / 2\pi r = J_V r / 2. \quad (1.34)$$

Ore galima taikyti be galo ilgo, plono laidininko sampratą. Todėl pagal formulę (1.32) randama srovės kuriamo magnetinio lauko stiprio ore $H_{Vo}(r)$ išraiška:

$$H_{Vo}(r) = I_V / L = J_V \pi d^2 / 4 \cdot 2\pi r = J_V d^2 / 8r, \text{ kai } r \geq d/2. \quad (1.35)$$

Kai $r = d/2$, išraiškos (1.33) ir (1.34) susilygina. Magnetinio lauko stipris ant laidininko ir oro ribos bus $H_V(d/2) = J_V d / 4$.

Įvertinus (1.5) gaunama $B = \mu H$. Tačiau magnetinės skvarbos laidininko μ_l ir oro μ_0 dydžiai gali būti vienodi arba skirtingi. EM įtaisuose dauguma atvejų naudojami mažos varžos nemagnetiniai laidininkai: varis, sidabras, auksas. Jų $\mu_l = \mu_0$. Tai reikia įvertinti magnetinio srauto tankio laidininke $B_{VI}(r)$ ir ore $B_{Vo}(r)$ išraiškose:

$$B_{VI}(r) = \mu_0 J_V r / 2, \quad r \leq d/2, \quad (1.36)$$

$$B_{Vo}(r) = \mu_0 J_V d^2 / 8r, \quad r \geq d/2. \quad (1.37)$$

Kai $r = d/2$, išraiškos (1.35) ir (1.36) susilygina. Magnetinio srauto tankis ant laidininko ir oro ribos bus $B_V(d/2) = \mu_0 \cdot J_V d / 4$.

Reikia apskaičiuoti H_{VI} , H_{Vo} , ir B_{VI} , B_{Vo} priklausomybes nuo r bei konkrečias $H_V(d/2)$, $B_V(d/2)$ reikšmes ant laidininko ir oro ribos, kai $r = d/2$:

$$H_{VI}(r) = J_V r / 2 = 1 \cdot r / 2 = r / 2 \text{ A/m},$$

$$H_{Vo}(r) = J_V d^2 / 8r = 1 \cdot (10^{-2})^2 / 8r = 1,25 \cdot 10^{-5} / r \text{ A/m}, \quad (1.38)$$

$$H_V(d/2) = J_V d / 2 \cdot 2 = 1 \cdot 10^{-2} / 4 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ A/m} = 2,5 \text{ mA/m} \ll \\ \ll H_L(a) \approx 1,59 \text{ A/m}, \quad (1.10 \text{ užd.})$$

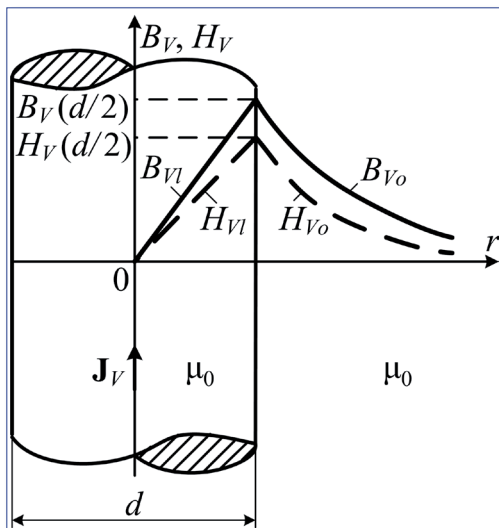
$$B_{VI}(r) = \mu_0 J_V r / 2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot r / 2 \approx 6,28 \cdot 10^{-7} r \text{ T},$$

$$B_{Vo}(r) = \mu_0 J_V d^2 / 8r = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot (10^{-2})^2 / 8r \approx 1,57 \cdot 10^{-11} / r \text{ T}, \quad (1.39)$$

$$B_V(d/2) = \mu_0 J_V d / 2 \cdot 2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-2} / 4 \approx 3,14 \cdot 10^{-9} \text{ T} \ll \\ \ll B_L(a) = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T}. \quad (1.10 \text{ užd.})$$

Taigi nemagnetiniame laidininke $H_{VI}(r)$ ir $B_{VI}(r)$ didėja nuo nulio centre tiesiniu dėsnio išilgai spindulio r iki laidininko paviršiaus. Čia $H_{VI}(r)$ tampa lygiu $H_V(d/2)$, nuo kurio $H_{Vo}(r)$ mažėja atvirkščiai proporcingai, didėjant r . Tuo tarpu $B_{VI}(r)$ ant laidininko paviršiaus pasiekia $B_V(d/2)$ reikšmę, nuo kurios $B_{Vo}(r)$ irgi mažėja atvirkščiai proporcingai, didėjant r (1.16 pav.).

Idomu, kad $H_V(d/2)$, $B_V(d/2)$ reikšmės, čia gautos ant laidininko ir oro ribos, esant dvigubai mažesniai atstumui $r = d/2 = 0,5 \text{ cm}$ nuo laidininko centro, yra daug mažesnės nei 1.10 užduoties sprendime gautos atitinkamos $H_L(a)$, $B_L(a)$ reikšmės, kai $r = a = 1 \text{ cm}$. Tai paaiškinama tuo, kad, kai tūrinės srovės tankis gana storame nemagnetiniame laidininke atrodo nemažas – $J_V = 1 \text{ A/m}^2$, jame tekanti srovė $I_V \approx 0,079 \cdot 10^{-3} \text{ A} \approx 0,079 \text{ mA}$ yra daug silpnesnė nei srovė be galo ilgame, ploname, tiesiame laidininke $I_L = 100 \text{ mA}$.



1.16 pav. Storo laidininko tūrinės srovės kuriamo magnetinio lauko skaičiavimas

Panaudojus išraiškas (1.37), (1.38) šį kartą, kai $r = a = 1 \text{ cm}$ ir $r = b = 1 \text{ m}$, ore gaunama:

$$H_{Vo}(a) = 1,25 \cdot 10^{-5} / a = 1,25 \cdot 10^{-5} / 10^{-2} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ A/m} = 1,25 \text{ mA/m},$$

$$H_{Vo}(b) = 1,25 \cdot 10^{-5} / b = 1,25 \cdot 10^{-5} / 1 = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ A/m} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ mA/m},$$

$$B_{Vo}(a) \approx 1,57 \cdot 10^{-11} / a \approx 1,57 \cdot 10^{-11} / 10^{-2} \approx 1,57 \cdot 10^{-9} \text{ T},$$

$$B_{Vo}(b) \approx 1,57 \cdot 10^{-11} / b \approx 1,57 \cdot 10^{-11} / 1 \approx 1,57 \cdot 10^{-11} \text{ T}.$$

Visi anksčiau ir čia gauti magnetinio lauko stipriai bei srauto tankiai yra maži, palyginti net su mažiausiais leidžiamais gyvenamoje aplinkoje pagal higienos normą [4].

1.12. Išveskite kaip ir 1.11, esant tūrinei srovei I_V [12].

Atsakymas: $H_{Vl}(r) = 2I_V r / \pi d^2$, $B_{Vl}(r) = 2I_V r \mu_0 / \pi d^2$, kai $r \leq d/2$,
ir $H_{Vo}(r) = I_V / 2\pi r$, $B_{Vo}(r) = I_V \mu_0 / 2\pi r$, kai $r \geq d/2$.

1.13. Išveskite ir pavaizduokite laidininko, kuriuo teka tolygiai paviršiuje paskirstyta srovė, magnetinio lauko stiprio H_S bei srauto tankio B_S priklausomybes nuo spindulio r laidininke ir ore. Apskaičiuokite H_S ir B_S atstumais $a = 1 \text{ cm}$ ir $b = 1 \text{ m}$ nuo centro. Laidininko skersmuo $d = 1 \text{ cm}$, srovės tankis $J_S = 100 \text{ mA/m}$ [12].

Sprendimas: Laidininko viduje srovės nėra. Taigi iš Ampero dėsnio (1.28) gaunama, kad magnetinio lauko stipris ir srauto tankis viduje, kai $r \leq d/2$, yra lygūs nuliui – $H_{Sv}(r) = B_{Sv}(r) = 0$. Ore šie dydžiai randami, taikant be galo ilgo, plono, tiesaus laidininko sampratą, formules (1.30), (1.31) ir pažymėjus paviršinę srovę I_S bei laidininko skerspjūvio perimetrą πd :

$$H_{So}(r) = I_S / 2\pi r = J_S \pi d / 2\pi r = J_S d / 2r, \quad (1.40)$$

$$B_{So}(r) = \mu H_{So}(r) = \mu I_S / 2\pi r = \mu J_S \pi d / 2\pi r = \mu J_S d / 2r. \quad (1.41)$$

Čia reikia įvertinti laidininko paviršinės srovės dydį:

$$I_S = J_S \cdot \pi d = 100 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 10^{-2} \approx 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ A} \approx 3,14 \text{ mA}.$$

Lieka apskaičiuoti H_{So} ir B_{So} priklausomybes nuo r bei konkrečias $H_S(d/2)$, $B_S(d/2)$ reikšmes ant laidininko paviršiaus, kai $r = d/2$:

$$H_{So}(r) = J_S d / 2r = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} / 2r = 0,5 \cdot 10^{-3} / r \text{ A/m}, \quad (1.42)$$

$$H_S(d/2) = J_S d / d = J_S = 100 \text{ mA/m},$$

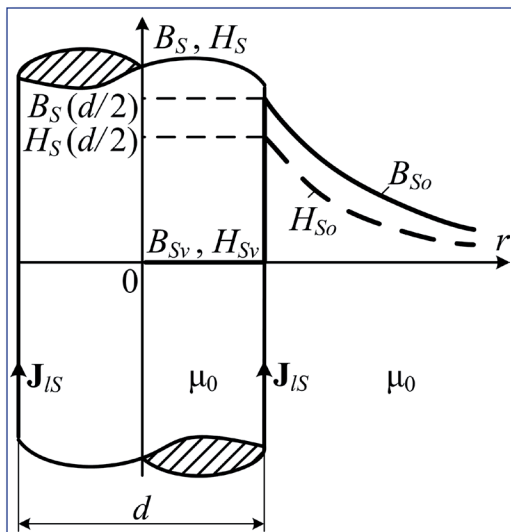
$$B_{So}(r) = \mu_0 H_{So}(r) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} / r \approx 6,28 \cdot 10^{-10} / r \text{ T}, \quad (1.43)$$

$$B_S(d/2) \approx 6,28 \cdot 10^{-10} \cdot 2/d \approx 6,28 \cdot 10^{-10} \cdot 2/10^{-2} \approx 12,6 \cdot 10^{-8} \text{ T}.$$

Laidininko viduje magnetinio lauko nėra, paviršiuje jo stipris lygus srovės tankiui, o ore $H_{So}(r)$ ir $B_{So}(r)$ mažėja nuo $H_S(d/2)$ ir $B_S(d/2)$ reikšmių atvirkščiai proporcingai, didėjant r (1.17 pav.).

Panaudojus formules (1.42) ir (1.43), kai $r = a = 1 \text{ cm}$ bei $r = b = 1 \text{ m}$, ore gaunama:

$$H_{So}(a) = 0,5 \cdot 10^{-3} / a = 0,5 \cdot 10^{-3} / 10^{-2} = 50 \cdot 10^{-3} \text{ A/m},$$



1.17 pav. Storo laidininko paviršinės srovės kuriamo magnetinio lauko skaičiavimas

$$H_{So}(b) = 0,5 \cdot 10^{-3} / b = 0,5 \cdot 10^{-3} / 1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ A/m},$$

$$B_{So}(a) \approx 6,28 \cdot 10^{-10} / a \approx 6,28 \cdot 10^{-10} / 10^{-2} \approx 6,28 \cdot 10^{-8} \text{ T},$$

$$B_{So}(b) \approx 6,28 \cdot 10^{-10} / b \approx 6,28 \cdot 10^{-10} / 1 \approx 6,28 \cdot 10^{-10} \text{ T}.$$

Šios užduoties sprendinių skaitinės reikšmės yra tarp 1.10 ir 1.11 užduočių sprendinių reikšmių:

$$H_L > H_S > H_V, \quad B_L > B_S > B_V \quad \text{ir} \quad I_L > I_S > I_V.$$

Šios užduoties atveju magnetinio lauko stipriai neviršija pagal higienos normą [4] darbo vietose leidžiamo mažiausio stiprio 0,3 A/m. Magnetinio srauto tankiai gali viršyti gyvenamojoje aplinkoje leidžiamą minimalią normą 0,016 μT ir neviršija maksimalios – 1,8 μT .

1.14. Išveskite kaip ir 1.13, esant paviršinei srovei I_S [12].

Atsakymas: $H_{Sl}(r) = B_{Sl}(r) = 0$, kai $r \leq d/2$, ir $H_{So}(r) = I_S / 2\pi r$, $B_{So}(r) = I_S \mu_0 / 2\pi r$, kai $r \geq d/2$.

2. PLOKŠČIŲJŲ ELEKTROMAGNETINIŲ LAUKŲ SKLIDIMAS NERIBOTOSE TERPĖSE

Teorinė dalis

Gana aukštų dažnių elektromagnetiniai (EM) laukai sklinda įvairiose terpėse (vakuume, ore, vandenyje, žemėje ir kt.) bangų pavidalu. Tokios bangos aprašomos EM laukų duomenų (stiprių, srautų, laidžio ir slinkties srovių tankių bei jų vektorių) virpesiais, sklindančiais terpėse nuo vieno jų taškų link kitų. Kai laukų duomenys ir vektoriai kinta laike bei terpėse pagal harmonines ($\sin$ arba $\cos$) funkcijas, bangos vadinamos harmoninėmis. Jeigu jų kitimo funkcijos kitokios, pvz., pernešant informaciją, sklinda neharmoninės bangos. Tiesinėse terpėse kinta harmoninių bangų amplitudės ir fazės, bet nekinta harmoninės funkcijos ir dažniai. Netiesinėse terpėse kinta ir jie. Terpių taškų, kuriuos bangos pasiekia per vienodą laiką t , visuma vadinama bangų paviršiumi, arba frontu. Harmoninių bangų, kurių kampinis dažnis ω , paviršiuje yra vienoda jų duomenų ir vektorių virpesių fazė ($\varphi = \omega t = \text{const}$). Todėl bangų paviršius yra ir vienodos fazės paviršius. Jo sklaidimo greitis terpėje vadinamas bangų faziniu greičiu $\mathbf{v}_f$. EM bangos neribotose terpėse be nuostolių perneša informaciją ir energiją grupiniu greičiu $\mathbf{v}_{gr}$, nepernešdamos terpės medžiagos. Grupinis (informaciją pernešančių surištų bangų grupės) greitis turi fizikinę prasmę tik tada, kai visos grupės bangos sklinda vienodu faziniu greičiu. Todėl nesikeičia jų pernešama informacija. Tai įmanoma vadinamosiose nedispersinėse terpėse, kuriose visų bangų fazinis greitis $\mathbf{v}_f$ yra vienodas ir nepriklauso nuo dažnio. Tada grupinis ir fazinis greičiai irgi yra vienodi. Mažai dispersinėse terpėse skirtingų dažnių bangų faziniai greičiai $\mathbf{v}_f$ nedaug, bet skiriasi. Todėl grupinis ir fazinis greičiai yra nevienodi. Terpėse su nuostoliais ir daugelyje apribotų terpių skirtingų dažnių bangų

faziniai greičiai $\mathbf{v}_f$ labai skiriasi. Tokios terpės vadinamos dispersinėmis. Jose grupinis greitis netenka fizikinės prasmės, nes grupės bangos išsi-sklaido dėl skirtingų fazinių greičių ir jų pernešama informacija stipriai iškraipoma arba visai prarandama.

Plokščiųjų EM laukų bangos paviršius yra plokščias. Tokius laukus skleisti gali tik neribotas plokščias šaltinis – begalinė plokštuma. Realiai plokštieji EM laukai ir bangos neegzistuoja, nes nėra neribotų plokščių šaltinių. Bet praktiškai dažniau rūpi ne viso lauko paviršius, o tik nedidelės jo dalies, kuri pakankamai toli nuo šaltinio yra artima plokštumai, sklaidimas.

Dažnai ne tik EM laukų fazė, bet ir virpantys duomenys (elektrinio ar magnetinio laukų stipriai, srautų tankiai, jų vektoriai) yra vienodi visuose bangos paviršiaus taškuose. Tokie laukai ir bangos vadinami vienalyčiais (homogeniniais). Priešingu atveju, jie yra nevienalyčiai (nehomogeniniai).

Terpėje virpantys EM lauko vektoriai yra susiję tarpusavyje poromis vektorinėmis ryšio lygtimis:

$$\mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \tilde{\mu} \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \tilde{\sigma} \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

čia $\tilde{\epsilon}$, F/m – terpės dielektrinės skvarbos tenzorius; $\tilde{\mu}$, H/m – magnetinės skvarbos tenzorius, $\tilde{\sigma}$, S/m – terpės savitojo elektrinio laidžio tenzorius.

Taigi ryšio tarp atitinkamų porų vektorių pobūdis priklauso nuo terpių, kuriose sklinda EM laukai, savybių. Bendriausiu atveju tokiais tenzoriais aprašoma galima terpių elektrinių, magnetinių ir kt. savybių anizotropija. Anizotropinėmis vadinamos terpės, kurių fizinės savybės, pvz., EM duomenys, skiriasi įvairiomis kryptimis. Todėl anizotropinėse terpėse porų vektoriai $\mathbf{D}$ ir $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ ir $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$ ir $\mathbf{E}$ yra nelygiagretūs. Stačiakampėje koordinatų x, y, z sistemoje $\tilde{\epsilon}$ ir $\tilde{\mu}$ tenzoriai užrašomi lentelėmis:

$$\tilde{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Tai nėra matricių determinantai, kuriuos galima išskleisti, atliekant matematinius veiksmus su jų elementais – sandais. Šiuo atveju 9 sandai tik nurodo atitinkamas dielektrinės arba magnetinės skvarbos reikšmės tam tikromis trimatės koordinatinių sistemos x, y, z kryptimis. Sandų prasmė ir vieta geriau išryškėja skaliarinėse vektorių projekcijų ryšio lygtyse. Iš jų matyti, kad kiekviena projekcija D arba B surišta per atitinkamus sandus su visomis projekcijomis E arba H :

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z, \\ B_y &= \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z, \\ B_z &= \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Konkrečių terpių kai kurie tenzorių $\vec{\varepsilon}$, $\vec{\mu}$ ir $\vec{\sigma}$ sandai gali būti lygūs nuliui. Pvz., izotropinių terpių, kurių fizinės savybės yra vienodos visomis kryptimis, tenzoriai $\vec{\varepsilon}$ ir $\vec{\mu}$ užrašomi taip:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon, \quad (2.6)$$

$$\vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{vmatrix} = \mu. \quad (2.7)$$

Tada porų vektorių $\mathbf{D}$ ir $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ ir $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$ ir $\mathbf{E}$ ryšio lygtys yra paprastesnės:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.8)$$

Kadangi ε , μ ir σ yra teigiamieji skaliariniai dydžiai, tai izotropinėse terpėse porų vektoriai $\mathbf{D}$ ir $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ ir $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$ ir $\mathbf{E}$ yra lygiagretūs (1.1–1.3 pav.). Jų projekcijų ryšio lygtis lengva gauti iš (2.4), (2.5) lygčių, įstačius į pastarąsias $\vec{\varepsilon}$ ir $\vec{\mu}$ tenzorių (2.6), (2.7) sandus. Akivaizdu, kad izotropinėse terpėse kiekviena projekcija D arba B surišta tik su viena atitinkama projekcija E arba H :

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon E_x, \\ D_y &= \varepsilon E_y, \\ D_z &= \varepsilon E_z, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} B_x &= \mu H_x, \\ B_y &= \mu H_y, \\ B_z &= \mu H_z. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Taip galima pereiti nuo sudėtingų anizotropinių prie paprastų izotropinių terpių ir jose sklindančių EM laukų tyrimo.

Tačiau tam reikia įvertinti bent izotropinių terpių duomenis ε , μ ir σ . Pagal juos terpės santykinai skirstomos į idealiuosius ir realiuosius dielektrikus, magnetikus, laidininkus ir tarpines terpes. Skirtingų terpių EM duomenys labai skiriasi ir dar priklauso nuo EM laukų virpesių dažnio. Todėl, pvz., skirstant terpes pagal laidį taikomas bedimensis kriterijus, kuriuo skaičiuojamas laidžio J_{lm} ir slinkties J_{slm} srovių tankių amplitudžių santykis (2.1 lentelė).

2.1 lentelė. Terpių skirstymo pagal laidį kriterijus

Laidžio kriterijus	Kriterijaus dydis	Terpė
$\frac{J_{lm}}{J_{slm}} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma}{2\pi f \cdot \epsilon_r \epsilon_0} =$	$\infty, J_{slm} = 0$	Idealusis laidininkas
	$\gg 1, J_{lm} \gg J_{slm}$	Realusis laidininkas
	$\approx 1, J_{lm} \approx J_{slm}$	Tarpinė terpė
	$\ll 1, J_{lm} \ll J_{slm}$	Realusis dielektrikas
	$0, J_{lm} = 0$	Idealusis dielektrikas

Pagal šį kriterijų visos realiosios terpės didėjant dažniui įgauna vis daugiau dielektrikų savybių. Tačiau geri laidininkai (aliuminis, varis, sidabras, auksas) plačiame dažnių diapazone išlieka gerais laidininkais, nors jų laidžio kriterijus irgi mažėja didėjant dažniui. Tarpinės terpės (sausas ir drėgna žemė, gėlas ir jūros vanduo) žemuose dažniuose yra prasti laidininkai, o aukštuose dažniuose tampa prastais dielektrikais. Tuo tarpu geri dielektrikai visuose dažniuose išlieka gerais dielektrikais.

Žinant fazinius laukų sklaidimo greičius v_f (indeksas f) ir dažnius f , galima rasti bangų ilgį neribotose terpėse (indeksas T):

$$\lambda_T = v_{fT} / f. \quad (2.11)$$

Bet vakuume (indeksas 0) ir ore (indeksas o) EM laukų ir bangų faziniai greičiai apytikriai lygūs šviesos greičiui $v_{f0} = c_0 \approx 3 \cdot 10^8$ m/s. Todėl bangų ilgį vakuume arba ore galima skaičiuoti pagal išraišką (2.11) ir gauti formulę (2.12) arba tiesiog skaičiuoti mintinai pagal supaprastintą formulę (2.13):

$$\lambda_0 = v_{f0} / f = c_0 / f \approx 3 \cdot 10^8 / f \approx \lambda_o \text{ m/s}, \quad (2.12)$$

$$\lambda_0 (\text{m}) \approx 300 / f (\text{MHz}) \approx \lambda_o \text{ m}. \quad (2.13)$$

Abiem atvejais gaunamas toks pat rezultatas. EM bangų ilgiai realiosiose apribotose terpėse yra vienos eilės su terpių matmenimis arba daug mažesni už juos.

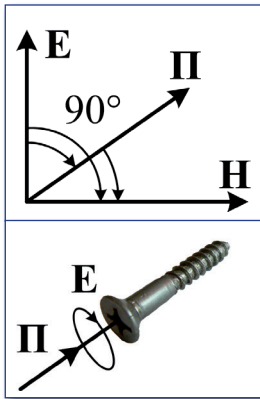
Žmonės naudoja EM laukus labai plačiuose dažnių ir bangų ilgių diapazonuose. Mūsų jutimo organai tiesiogiai reaguoja į pakankamai

stiprius EM laukus: gydymą (terapiją) laukais nuo žemųjų dažnių (ŽD, $f = 30$ kHz, $\lambda = 10$ km ore – čia ir žemiau) iki ypač aukštųjų dažnių (YAD, $f = 300$ GHz, $\lambda = 1$ mm), šilumą (infraraudonuosius IR spindulius, $f \approx (150) 300$ GHz–405 THz, $\lambda \approx (2) 1$ mm–740 nm), šviesą (regimuosius spindulius, $f \approx 395$ –790 THz, $\lambda = 760$ –380 nm), ultravioletinius UV spindulius ($f = 750$ THz–30 PHz, $\lambda = 400$ –10 nm), rentgeno X spindulius ($f = 3$ PHz–30 ZHz, $\lambda = 100$ nm–0,01 pm), gama γ spindulius ($f \geq 3$ EHz, $\lambda \leq 0,1$ nm) (4 priedas). EM laukų poveikį riboja Lietuvos higienos norma [4].

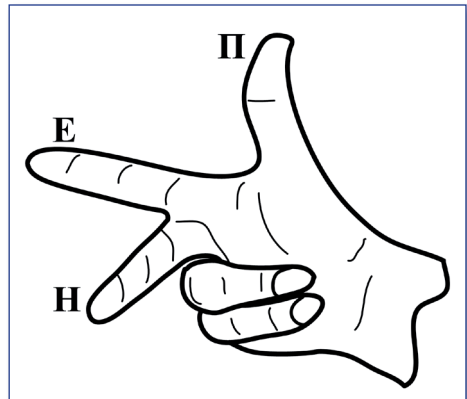
Jau minėta, kad EM bangos perneša elektriniuose ir magnetiniuose laukuose sukauptą energiją. Tai aprašo Pointingo vektorius:

$$\mathbf{\Pi} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \text{ VA/m}^2 = \text{W/m}^2. \quad (2.14)$$

Jo modulis $\Pi = EH$ nurodo vatais EM laukų galią, perveriančią vektoriui $\mathbf{\Pi}$ statmeną paviršiaus ploto vienetą. Tai yra EM galios srauto tankis. Pointingo vektoriaus kryptis sutampa su EM laukų sklaidimo ir energijos pernešimo kryptimi. Ji randama pagal $\mathbf{E}$ ir $\mathbf{H}$ vektorinės sandaugos (dešiniojo sraigto) taisyklę (2.1 pav.): vektorių $\mathbf{E}$ sukant trumpiausiu keliu link vektoriaus $\mathbf{H}$, ta pačia kryptimi sukamo dešiniojo sraigto išilginis judesys sutaps su vektoriaus $\mathbf{\Pi}$ kryptimi. EM lauko vektoriai $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ ir $\mathbf{\Pi}$ visada yra statmeni tarpusavyje. Vektoriai $\mathbf{E}$ ir $\mathbf{H}$ yra skersinėje plokštumoje, statmenoje vektoriui $\mathbf{\Pi}$ ir EM lauko sklaidimo kryptčiai. Todėl EM bangos vadinamos vektorinėmis skersinėmis bangomis. $\mathbf{\Pi}$ vektoriaus kryptį galima gauti ir taikant dešinėsios rankos taisyklę (2.2 pav.): rodomasis, didysis pirštai ir nykštys nukreipiami trimis viena kitai statmenomis kryptimis. Rodomasis pirštai vaizduos elektrinio lauko stiprio vektorių, didysis – magnetinio lauko stiprio vektorių, o nykštys rodytų, kur link sklinda EM laukas.



2.1 pav. Vektorinės sandaugos (dešiniojo sraigto) taisyklė Pointingo vektoriaus kryptį nustatyti



2.2 pav. Dešinėsios rankos taisyklė Pointingo vektoriaus kryptį nustatyti

Tūryje V sukauptos elektrinio ir magnetinio laukų energijos randamos pagal formules:

$$W_e = \int_V w_e dV \text{ J}, \quad W_m = \int_V w_m dV \text{ J}. \quad (2.15)$$

Tūrio vienetui tenkantį elektrinio ir magnetinio laukų energijos kiekį, t. y. tūrinį tankį, nurodo paprastos išraiškos:

$$w_e = \varepsilon E^2 / 2 \text{ J/m}^3, \quad w_m = \mu H^2 / 2 \text{ J/m}^3. \quad (2.16)$$

Harmoninių plokščiųjų vienalyčių bangų neribotose terpėse elektrinio ir magnetinio laukų stiprių kompleksinės amplitudės stačiakampėje koordinatinių x, y, z sistemoje aprašomos formulėmis:

$$\underline{E}_x(z) = \underline{E}_x e^{-kz}, \quad \underline{H}_y(z) = \underline{H}_y e^{-kz} = \underline{E}_x e^{-kz} / \underline{Z}_T, \quad (2.17)$$

čia $\underline{E}_x, \underline{H}_y$ – kompleksiniai amplitudžių koeficientai; k – kompleksinis bangos sklaidimo koeficientas (bangos skaičius); $\underline{Z}_T$ – terpės kompleksinė banginė varža sklindančiai bangai.

Bangos sklaidimo koeficientas $\underline{k}$ yra sudėtas iš dviejų realiųjų koeficientų – silpimo α ir fazės β :

$$\underline{k} = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\underline{\epsilon}\mu} \text{ 1/m}, \quad (2.18)$$

čia $j = \sqrt{-1}$ – menamasis vienetas, $\underline{\epsilon}$ – terpės kompleksinė dielektrinė skvarba.

Ši skvarba įvertina realiosios terpės su EM energijos nuostoliais dielektrinę skvarbą, jos savitąjį laidį ir virpesių dažnį:

$$\underline{\epsilon} = \epsilon(1 - j\sigma/\omega\epsilon) = \epsilon(1 - jJ_{lm}/J_{slm}) = \epsilon(1 - j\tg\delta), \quad (2.19)$$

čia J_{lm}/J_{slm} – jau aptartas terpių laidžio kriterijus, $\tg\delta$ – energijos nuostolių realiajame dielektrike kriterijus. Šie kriterijai yra lygūs.

Ištačius $\underline{k}$ išraišką (2.18) į formulę (2.17), gaunama:

$$\underline{E}_x(z) = \underline{E}_x e^{-\underline{k}z} = \underline{E}_x e^{-(\alpha + j\beta)z} = \underline{E}_x e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}. \quad (2.20)$$

Tai reiškia, kad realiosiose terpėse su nuostoliais sklindančių išilgai ašies z bangų amplitudės mažėja pagal eksponentinį dėsnį $e^{-\alpha z}$. Čia e laipsnio rodiklyje yra bangų silpimo terpėje koeficientas α , matuojamas 1/m. Kadangi z matuojamas metrais, $-\alpha z$ yra neigiamasis bevardis dydis, lemiantis amplitudžių mažėjimą, kai $\alpha \neq 0$.

Išraiškos (2.20) narys $e^{-j\beta z}$ reiškia, kad sklindančių išilgai ašies z bangų fazės mažėja tiesiniu dėsniu βz su fazės koeficientu β , didėjant z . Ženklas „-“ reiškia, kad nuo koordinatės z pradžios nutolusiuose taškuose bangų virpesiai atsilieka (vėluoja) faze $-\beta z$.

Bet kokiose terpėse bangų fazės koeficiento formulė yra:

$$\beta = 2\pi/\lambda \text{ rad/m} = 1/\text{m}. \quad (2.21)$$

Visose terpėse visų bangų virpesių fazės pasikeičia 2π radianų (360°), nusklidus bangų ilgio atstumą λ . Todėl bangos fazės koeficientas parodo, kiek pasikeičia bangos virpesių fazė, nusklidus bangai terpėje 1 metrą. Radianai yra bemačiai SI sistemos vienetai, todėl β galima matuoti ir 1/m. Tačiau jo negalima painioti su tokiais pat vienetais matuojamu

silpimo koeficientu α , kurio fizikinė prasmė visai kita. Užtat labai patogiu būdu šiuos koeficientus sudėti į vieną kompleksinį bangos sklaidimo koeficientą $\underline{k}$ (2.18), matuojamą tuo pačiu vienetu 1/m. Koeficientas $\underline{k}$ įvertina sklindančių terpėse išilgai ašies z bangų amplitudžių silpimą ir kartu fazių kitimą.

Neribotų terpių kompleksinės banginės varžos $\underline{Z}_T$ plokščioms bangoms formulė gali būti gaunama kaip bangų elektrinio ir magnetinio laukų stiprių kompleksinių amplitudžių (2.17) santykis:

$$\underline{Z}_T = \underline{E}_x(z) / \underline{H}_y(z) = \sqrt{\mu/\varepsilon} = |\underline{Z}_T| e^{j\theta} \quad \Omega, \quad (2.22)$$

čia $|\underline{Z}_T|$ – banginės varžos modulis, Ω ; θ – argumentas, rad.

Taip rodykline forma išreikšta kompleksinė banginė varža per modulį nurodo elektrinio ir magnetinio laukų stiprių amplitudžių santykį $|\underline{Z}_T| = E_{xm}(z) / H_{ym}(z)$, o per argumentą – virpesių fazių skirtumą $\theta = \varphi_E(z) - \varphi_H(z)$ rad. Tačiau tiesinėse terpėse ne šie amplitudžių santykiai ir fazių skirtumas nulemia terpės banginę varžą, o atvirkščiai – banginė varža juos nurodo.

Terpių banginę varžą nulemia jų pačių EM duomenų santykis μ/ε bei duomenų priklausomybė nuo dažnio. EM įtaisuose naudojamų feromagnetinių medžiagų yra palyginti mažai (dauguma feritai). Jų savytės laidis yra labai nedidelis, bangų energijos nuostoliai juose yra maži, todėl μ priklausomybė nuo dažnio nuostolių prasme dauguma atvejų nevertinama ir magnetinė skvarba laikoma realiuoju dydžiu. Bet dielektrikų su mažesniais arba didesniais nuostoliais įvairovė yra didelė. Todėl įvesta kompleksinė dielektrinė skvarba $\underline{\varepsilon}$ (2.19) priklauso nuo laukų dažnio.

Toliau trumpai panagrinėsime plokščiųjų vienalyčių EM laukų sklaidimą neribotuose idealiuosiuose ir realiuosiuose dielektrikuose bei laidininkuose.

Idealiuosiuose dielektrikuose ($\sigma_d = 0$) nėra laisvųjų krūvių ($\rho_d = 0$) ir laidžio srovių ($\mathbf{J}_{ld} = 0$), o jų dielektrinės ir magnetinės skvarbos ε_d ir μ_d yra teigiamieji skaliariniai dydžiai. EM bangų faziniai greičiai idealiuosiuose dielektrikuose yra:

$$v_{fd} = 1/\sqrt{\epsilon_d \mu_d} = 1/\sqrt{\epsilon_{rd} \epsilon_0 \cdot \mu_{rd} \mu_0} = 1/(\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cdot \sqrt{\epsilon_{rd} \mu_{rd}}) = c_0/\sqrt{\epsilon_{rd} \mu_{rd}},$$

$$v_{f0} = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c_0 = \text{const} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (2.23)$$

Taigi plokščiųjų EM bangų faziniai greičiai idealiuosiuose dielektrikuose yra, palyginti su greičiu vakuume, tuo mažesni, kuo didesni jų ϵ_{rd} , μ_{rd} . Didžiausi bangų faziniai greičiai idealiuosiuose dielektrikuose yra vakuume. Jie lygūs matomosios šviesos greičiui, todėl ir šviesa yra EM bangos. Idealiaji dielektrikai yra nedispersinės terpės, nes EM bangų faziniai greičiai juose nepriklauso nuo dažnio.

Idealiosiose dielektrikuose laidžio srovės neteka, todėl energijos nuostolių nėra ir EM bangos nesilpsta. Silpimo koeficientai yra lygūs nuliui – $\alpha_d = 0$ 1/m. Bangų fazių ir sklaidimo koeficientai tokiose terpėse randami pagal išraiškas:

$$\beta_d = 2\pi/\lambda_d = 2\pi f/v_{fd} = \omega\sqrt{\epsilon_d \mu_d} = \omega\sqrt{\epsilon_{rd} \mu_{rd}}/c_0 \text{ rad/m}, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \underline{k}_d &= \alpha_d + j\beta_d = 0 + j\beta_d = j\beta_d = j\omega\sqrt{\epsilon_d \mu_d} = \\ &= j\omega\sqrt{\epsilon_{rd} \mu_{rd}}/c_0 \text{ 1/m}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Bangų fazių ir sklaidimo koeficientai didėja, augant laukų dažniui ir mažėjant jų faziniams greičiams (bangų ilgiams) dėl idealųjų dielektrikų ϵ_{rd} , μ_{rd} didėjimo. Mažiausi šie koeficientai yra vakuume.

Idealųjų dielektrikų be EM energijos nuostolių banginės varžos yra aktyviosios:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_d &= R_d = E_{xmd}/H_{ymd} = \sqrt{\mu_d/\epsilon_d} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \sqrt{\mu_{rd}/\epsilon_{rd}} = \\ &= R_{T0} \sqrt{\mu_{rd}/\epsilon_{rd}} \Omega, \quad R_{T0} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega, \end{aligned} \quad (2.26)$$

čia R_{T0} – vakuomo ($\sim$ oro) banginė varža. Ji yra mažiausia galima magnetodielektrikams ($\mu_{rd} > 1$) ir didžiausia galima nemagnetiniams dielektrikams ($\epsilon_{rd} > 1$).

Šiuo atveju aktyviosios banginės varžos nereiškia idealųjų dielektrikų pasipriešinimo EM laukams ir nesukelia laukų silpimo. Juk, pvz.,

vakuumas yra absoliuti tuštuma, idealusis dielektrikas, kuriame silpninti laukus nėra kam. Tačiau remiantis (2.26), žinant dielektrikų bangines varžas R_d ir elektrinių laukų stiprio amplitudes E_{xmd} , galima rasti magnetinių laukų stiprio amplitudes H_{ymd} , ir atvirkščiai. Idealieji dielektrikai neįneša fazių skirtumo tarp elektrinio ir magnetinio laukų virpesių bei vektorių (2.22).

Realųjų dielektrikų savitieji laidžiai $\sigma_{dr} \neq 0$. Tačiau jie yra nedideli ir atitinka terpių skirstymo pagal laidžius kriterijų $J_{lmdr} / J_{slmdr} = \sigma_{dr} / \omega \epsilon_{dr} \ll 1$. Tai įvertinama gaunant plokščiųjų bangų realiuosiuose dielektrikuose fazinių greičių, fazės ir silpimo koeficientų, realiųjų dielektrikų banginių varžų išraiškas [12].

Neribotuose realiuosiuose dielektrikuose plokščiųjų bangų faziniai greičiai yra tokie pat, kaip idealiuosiuose dielektrikuose ir nepriklauso nuo dažnio (2.23). Taigi realieji dielektrikai irgi yra nedispersinės terpės. Esant tokiems pat faziniams greičiams, turi būti vienodi ir fazės koeficientai (2.24).

Plokščiųjų bangų silpimo koeficientai realiuosiuose dielektrikuose nepriklauso nuo dažnio ir auga, didėjant dielektrikų savitiesiems laidžiams bei banginėms varžoms:

$$\alpha_{dr} = \sigma_{dr} R_{dr} / 2. \quad (2.27)$$

Realųjų dielektrikų banginių varžų moduliai praktiškai yra lygūs jų banginėms varžoms, apskaičiuotoms neįvertinant nuostolių:

$$|\underline{Z}_{dr}| \approx R_{dr} = \sqrt{\mu_{dr} / \epsilon_{dr}}. \quad (2.28)$$

Tačiau realiųjų dielektrikų banginės varžos yra kompleksinės su realiąja ir induktyvinio pobūdžio menamąja dalimis. Todėl realiuosiuose dielektrikuose plokščiųjų bangų elektriniai laukai pagal fazę nedideliu kampu $\theta_{dr} \approx \sigma_{dr} / 2\omega \epsilon_{dr}$ aplenkia magnetinius laukus.

Realųjų laidininkų savitieji laidžiai yra gana dideli: $J_{lml} / J_{slml} = \sigma_l / \omega \epsilon_l \gg 1$. Todėl realiuosiuose laidininkuose sklindančių bangų silpimo ir fazės koeficientai yra lygūs:

$$\alpha_l = \beta_l \approx \sqrt{\omega \mu_l \sigma_l} / 2. \quad (2.29)$$

Vienodos yra tik jų skaitinės reikšmės, o fizikinės prasmės skirtingos, faktiškai ir matavimo vienetai skirtingi, nors rašomi vienodai.

Realųjų laidininkų kompleksinės dielektrinės skvarbos ir banginės varžos aprašomos išraiškėmis:

$$\underline{\varepsilon}_l = \varepsilon_l \left(1 - \underline{j}\sigma_l / \omega \varepsilon_l\right) \approx \sigma_l e^{-j\pi/2} / \omega, \quad \underline{Z}_l = \sqrt{\mu_l / \underline{\varepsilon}_l} = \sqrt{\omega \mu_l / \sigma_l} e^{j\pi/4}. \quad (2.30)$$

Iš formulių (2.30) gauname, kad realiųjų laidininkų dielektrinės skvarbos yra neigiamosios, menamosios ir labai didelės, ypač žemų dažnių atveju. Jos mažėja atvirkščiai proporcingai, didėjant dažniui. Banginės varžos yra kompleksinės su realiosiomis ir induktyvinio pobūdžio menamosiomis dalimis. Plokščiųjų bangų elektriniai laukai realiuosiuose laidininkuose, neatsižvelgiant į jų didelius savituosius laidžius, faze aplenkia magnetinius laukus pastoviu kampu $\pi/4$.

Ištačius į (2.29), (2.30) idealiųjų laidininkų laidį $\sigma_{li} = \infty$, gaunami bangų silpimo ir fazės koeficientai $\alpha_{li} = \beta_{li} = \infty$, dielektrinė skvarba $\underline{\varepsilon}_{li} = -j\infty = \infty e^{-j\pi/2}$ ir banginė varža $\underline{Z}_l = 0 \cdot e^{j\pi/4}$.

Realiuosiuose laidininkuose bangos neegzistuoja. EM laukai tik labai negiliai įsiskverbia į realiuosius laidininkus. Skvarbos į juos gyliu laikomas atstumas δ_l , kuriame elektromagnetinių laukų vektorių amplitudės sumažėja e kartų – $e^{\alpha_l \delta_l} = e^1$. Iš šios sąvokos gaunama skvarbos gylio išraiška:

$$\delta_l = 1/\alpha_l = \sqrt{2/\omega \mu_l \sigma_l}. \quad (2.31)$$

Taigi skvarbos gylis mažėja didėjant dažniui, magnetinei skvarbai ir laidžiui. Ribiniu idealiųjų laidininkų atveju ($\sigma_{li} = \infty$) skvarbos gylis lygus nuliui – EM laukai apskritai neįsiskverbia į idealiuosius laidininkus.

Įvertinus, kad $\beta_l = 2\pi/\lambda_l = \omega/v_{fl}$, ir formulę (2.31), gaunamos fazių greičių ir bangų ilgių realiuosiuose laidininkuose išraiškos:

$$v_{fl} = \omega/\beta_l = \omega/\alpha_l = \omega\delta_l = \sqrt{2\omega/\mu_l \sigma_l}, \quad (2.32)$$

$$\lambda_l = 2\pi/\beta_l = 2\pi/\alpha_l = 2\pi\delta_l = 2\pi\sqrt{2/\omega \mu_l \sigma_l}. \quad (2.33)$$

Iš (2.32) gaunama, kad EM bangų faziniai greičiai realiuosiuose laidininkuose priklauso nuo dažnio, t. y. realieji laidininkai yra dispersinės terpės. Be to, iš šių išraiškų gaunama, kad bangų faziniai greičiai ir ilgiai realiuosiuose laidininkuose yra daug mažesni negu idealiuosiuose arba realiuosiuose dielektrikuose.

Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

2.1. Įrodykite, kad pagal dešiniojo sraigto taisyklę, taikomą Pointingo vektoriaus kryptį nustatyti, galima paprasčiau nurodyti ir Ampero bei Lorencio jėgų kryptis, nustatomas pagal kairiosios arba dešinėsios rankų taisykles.

Sprendimas: Ampero (1.6) ir Lorencio (1.7) jėgų bei Pointingo vektorių (2.14) lygtyse taikomos dviejų vektorių vektorinės sandaugos. Joms visoms galioja dešiniojo sraigto taisyklė.

2.2. Užrašykite elektrinio laidžio tenzorių $\vec{\epsilon}$ išraiškas ir išveskite J bei E projekcijų ryšio lygtis, kai terpės yra anizotropinės ir izotropinės.

Sprendimas: Jos analogiškos $\vec{\epsilon}$ išraiškoms (2.2), (2.6) bei projekcijų D ir E ryšio lygtims (2.4), (2.9).

2.3. Ore sklinda EM banga, kurios elektrinio lauko stiprio amplitudė $E_{xm} = 100$ V/m. Raskite bangos magnetinio lauko stiprio amplitudę, didžiausius elektrinio ir magnetinio laukų energijos tankius, EM lauko energijos tankį ir galios srauto tankį (Pointingo vektoriaus modulį) [2, 12].

Sprendimas: Taikoma (2.26) formulė magnetinio lauko stiprio amplitudei ore rasti:

$$H_{ym} = E_{xm}/R_{T0} = 100/377 = 0,265 \text{ A/m}.$$

Didžiausius elektrinio ir magnetinio laukų energijos tankius galima apskaičiuoti pagal formules (2.16):

$$w_e = \varepsilon E^2 / 2 = \varepsilon_0 E_{xm}^2 / 2 = 10^{-9} \cdot 100^2 / 2 \cdot 36\pi = 4,42 \cdot 10^{-8} \text{ J/m}^3,$$

$$w_m = \mu H^2 / 2 = \mu_0 H_{ym}^2 / 2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,265^2 / 2 = 4,42 \cdot 10^{-8} \text{ J/m}^3.$$

EM lauko energijos tankis gaunamas sudėjus elektrinio ir magnetinio laukų energijos tankius, kurie visada yra vienodi, arba padauginus vieną jų iš 2:

$$w_{em} = w_e + w_m = 2w_e = 2w_m = 4,42 \cdot 10^{-8} \cdot 2 = 8,84 \cdot 10^{-8} \text{ J/m}^3.$$

Pointingo vektoriaus modulis apskaičiuojamas pagal (2.14):

$$\Pi_m = E_{xm} H_{ym} = 100 \cdot 0,265 = 26,5 \text{ W/m}^2.$$

Jį galima rasti ir pagal kitą formulę, laikant, kad ore elektromagnetinių bangų fazinis (ir grupinis) greičiai $v_f = v_{gr} \approx c_0$:

$$\Pi_m = w_{em} \cdot v_f = 8,84 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^8 = 26,5 \text{ W/m}^2.$$

Išrašius formulėse efektinę $E_x = E_{xm} / \sqrt{2}$ arba momentinę (akimirninę) $e_x(t) = E_{xm} \cos \omega t$ elektrinio lauko stiprio reikšmes, gaunamos atitinkamai efektinės arba momentinės magnetinio lauko stiprio ir Pointingo vektoriaus reikšmės.

Palyginimui pabrėžtina, kad darbo vietose leistinas žmonės veikiančio dažnio iki 300 MHz elektrinio lauko stipris yra $E = 10\text{--}500 \text{ V/m}$, dažnio iki 50 MHz magnetinio lauko efektinis stipris – $H = 0,3\text{--}50 \text{ A/m}$, dažnio iki 300 GHz energijos srauto tankis – $27\text{--}1000 \mu\text{W/cm}^2$, esant poveikio trukmei $T = 480\text{--}5 \text{ min}$ [4]. Užduota elektrinio lauko stiprio amplitudė yra tarp leistinų reikšmių, apskaičiuota magnetinio lauko stiprio amplitudė mažesnė už mažiausias leistinas reikšmes, o energijos srauto tankis viršija normą.

2.4. Nustatykite, kokioms terpių grupėms pagal laidį priklauso parafinas ir ledas, kai dažnių diapazonas yra $\Delta f = 10^6\text{--}10^9$ Hz. Jų EM duomenys yra: parafino – $\epsilon_{rp} = 2,1$, $\sigma_p = 10^{-14}$ S/m; ledo – $\epsilon_{rl} = 3$, $\sigma_l = 10^{-3}$ S/m ($t = -10^\circ\text{C}$) [12].

Sprendimas: Reikia rasti amplitudžių santykius tarp laidžio ir slinkties srovių tankių atskirai abiem terpėms, esant ribiniams dažnių diapazono dažniams. Turint tuos santykius nustatyti, kokiai grupei pagal laidį priklauso šios terpės. Atliekant tai parafinui, kai dažniai $f_1 = 10^6$ Hz ir $f_2 = 10^9$ Hz (jų indeksais p , 1 bei 2 žymimos ir srovių tankių amplitudės bei kampiniai dažniai), gaunama:

$$\frac{J_{lmp1}}{J_{slmp1}} = \frac{\sigma_p}{\omega_1 \epsilon_p} = \frac{\sigma_p}{2\pi f_1 \epsilon_{rp} \epsilon_0} = \frac{10^{-14} \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 2,1 \cdot 10^{-9}} = 8,6 \cdot 10^{-11} \ll 1,$$

$$\frac{J_{lmp2}}{J_{slmp2}} = \frac{\sigma_p}{\omega_2 \epsilon_p} = \frac{\sigma_p}{2\pi f_2 \epsilon_{rp} \epsilon_0} = \frac{10^{-14} \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 2,1 \cdot 10^{-9}} = 8,6 \cdot 10^{-14} \ll 1.$$

Taigi parafinas, esant gana žemam $f_1 = 10^6$ Hz dažniui, yra geras realusis dielektrikas. Santykinai aukštam $f_2 = 10^9$ Hz dažniui jis yra dar geresnis dielektrikas. Parafinas visiems dažniams yra geras realusis dielektrikas ir tai būdinga dielektrikams. Deja, parafinas yra minkštas, neatsparus šilumai (lydymosi temperatūra $45\text{--}65^\circ\text{C}$) ir ugniai. Jis naudojamas kaip elektroizoliacinė medžiaga popieriui impregnuoti, bet netaikomas EM lauko įrenginiuose.

Ledo ($t = -10^\circ\text{C}$) atveju gaunama:

$$\frac{J_{lml1}}{J_{slml1}} = \frac{\sigma_l}{\omega_1 \epsilon_l} = \frac{\sigma_l}{2\pi f_1 \epsilon_{rl} \epsilon_0} = \frac{10^{-3} \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-9}} = 6 > 1.$$

Bet ledas, esant žemajam ribiniam dažniui $f_1 = 10^6$ Hz, netenkina nei realiojo laidininko laidžio kriterijaus $J_{lml1}/J_{slml1} \gg 1$, nei juo labiau realiojo dielektriko kriterijaus $J_{lml1}/J_{slml1} \ll 1$. Reikia patikrinti, ar laidininko kriterijus patenkinamas, esant dar žemesniam dažniui, pvz., kai $f_z = 10^3$ Hz :

$$\frac{J_{lmlz}}{J_{slmlz}} = \frac{\sigma_l}{\omega_z \epsilon_l} = \frac{\sigma_l}{2\pi f_z \epsilon_{rl} \epsilon_0} = \frac{10^{-3} \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-9}} = 6 \cdot 10^3 > 1.$$

Taip, pakankamai žemam dažniui ledas patenkina labai prasto realiojo laidininko laidžio kriterijų.

Esant gana aukštam $f_2 = 10^9$ Hz dažniui, ledui gaunama:

$$\frac{J_{lml2}}{J_{sml2}} = \frac{\sigma_l}{\omega_2 \varepsilon_l} = \frac{\sigma_l}{2\pi f_2 \varepsilon_{rl} \varepsilon_0} = \frac{10^{-3} \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-9}} = 6 \cdot 10^{-3} \ll 1.$$

Taigi ledas gana aukštuose dažniuose yra blogas realusis dielektrikas, lyginant su parafinu. Apskritai ledas yra tarpinė terpė. Jo elektromagnetiniai duomenys labai kinta, keičiantis dažniui ir temperatūrai. Be to, jis lydosi dar žemesnėje nei parafinas 0 °C temperatūroje ir virsta vandeniu. Parafino ir ledo dielektrinės savybės stiprėja, didėjant dažniui. Tai būdinga visoms terpėms.

2.5. Apskaičiuokite, kokioms terpių grupėms pagal laidį priklauso steatitas (balta talko miltelių keramika), kurios $\varepsilon_{rst} = 6$, $\sigma_{st} = 10^{-13}$ S/m, ir purus sniegas, kurio $\varepsilon_{sn} = 1,2$, $\sigma_{sn} = 10^{-5}$ S/m ($t = -10$ °C) [12], dažnių diapazone nuo 50 Hz iki 6 GHz.

Atsakymas: Steatitas visiems dažniams yra geras realusis dielektrikas. Purus sniegas yra tarpinė terpė, kurios santykinė dielektrinė skvarba yra šiek tiek didesnė už oro, bet mažesnė už ledo. Sniegas tirpsta 0 °C temperatūroje ir virsta vandeniu.

2.6. Raskite, kokioms terpių grupėms pagal laidį priklauso stiklinė ir gėlas arba sūrus (jūros) vanduo joje. Jų EM duomenys nurodytame dažnių diapazone pateikti [12].

Atsakymas: Stiklas visiems dažniams yra geras realusis dielektrikas. Gėlas ir sūrus (jūros) vanduo yra tarpinės terpės.

2.7. Nustatykite, kiek kartų pasikeis amplitudžių santykis tarp laidžio ir slinkties srovių tankių lydytam kvarcui ir sausai žemei dažnių diapazone nuo 100 Hz iki 10 GHz. Kokiai terpių grupei pagal laidį priklauso šios terpės, kurių EM duomenys yra: lydyto

kvarco – $\epsilon_{rk} = 3,8$, $\sigma_k = 10^{-16}$ S/m; *sausos žemės (dirvožemio)* – $\epsilon_{rz} = 5$, $\sigma_z = 1,1 \cdot 10^{-5}$ S/m [12]?

Sprendimas: Užduotį galima spręsti keliais metodais. Pvz., kaip anksčiau, apskaičiuoti laidžio ir slinkties srovių tankių amplitudžių santykius atskirai kvarcui ir sausai žemei, kai dažniai yra $f_1 = 100$ Hz ir $f_2 = 10$ GHz. Turint santykius, nustatyti, kokiai grupei pagal laidį priklauso šios terpės. Po to santykius, gautus esant dažniams f_2 ir f_1 , padalyti tarpusavyje atskirai kvarcui ir sausai žemei bei rasti santykių pokyčius (kartais) ir palyginti juos.

Tačiau racionalu pirma skaičiuoti amplitudžių santykio pokytį SP bet kuriai terpei, kai dažniai yra f_1 ir f_2 :

$$SP = \frac{J_{lm1}}{J_{slm1}} \bigg/ \frac{J_{lm2}}{J_{slm2}} = \frac{\sigma}{\omega_1 \epsilon} \bigg/ \frac{\sigma}{\omega_2 \epsilon} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{10^{10}}{10^2} = 10^8.$$

Taigi ieškomas amplitudžių santykio pokytis nepriklauso nuo terpių elektromagnetinių duomenų ir yra lygus dažnių diapazono didžiausio ir mažiausio dažnių santykiui. Tai galima panaudoti kitiems amplitudžių santykiams paprastai apskaičiuoti:

$$\frac{J_{lmk1}}{J_{slmk1}} = \frac{\sigma_k}{\omega_1 \epsilon_k} = \frac{\sigma_k}{2\pi f_1 \epsilon_{rk} \epsilon_0} = \frac{10^{-16} \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 10^2 \cdot 3,8 \cdot 10^{-9}} = 4,7 \cdot 10^{-9} \ll 1,$$

$$J_{lmk2} / J_{slmk2} = J_{lmk1} / (J_{slmk1} \cdot SP) = 4,7 \cdot 10^{-9} / 10^8 = 4,7 \cdot 10^{-17} \ll 1,$$

$$\frac{J_{lmz1}}{J_{slmz1}} = \frac{\sigma_z}{\omega_1 \epsilon_z} = \frac{\sigma_z}{2\pi f_1 \epsilon_{rz} \epsilon_0} = \frac{1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = 396 \gg 1,$$

$$J_{lmz2} / J_{slmz2} = J_{lmz1} / (J_{slmz1} \cdot SP) = 396 / 10^8 = 3,96 \cdot 10^{-6} \ll 1.$$

Tokiu būdu gaunama, kad lydytas kvarcas yra puikus realusis dielektrikas visame dažnių diapazone. Sausa žemė yra labai prastas realusis laidininkas, kai yra žemi dažniai, ir prastas realusis dielektrikas, kai yra aukšti dažniai, – taigi yra tarpinė terpė.

2.8. Nustatykite kaip ir 2.7, tik polistirenui ir drėgnam dirvožemiui. Jų duomenys nurodytame dažnių diapazone pateikti [12].

Atsakymas: Amplitudžių santykio pokytis SP visoms terpėms yra lygus dažnių diapazono didžiausio ir mažiausio dažnių santykiui. Polistirenas yra vandens nedrėkinamas visuose dažniuose geras realusis dielektrikas. Drėgnas dirvožemis – tarpinė terpė, kurios elektromagnetiniai duomenys yra tarp vandens ir sauso dirvožemio duomenų. Bet koks dirvožemis yra laidus žemo dažnio elektros srovei, todėl negalima be specialios elektroizoliacinės aprangos artintis prie ant žemės nukritusių 50 Hz dažnio aukštos įtampos laidų.

2.9. Apskaičiuokite EM bangų greitį vakuume (ore) ir vakuomo (oro) banginę varžą.

Atsakymas: Įstatykite ϵ_0 ir μ_0 reikšmes į $v_{f0} \approx v_{f0}$ ir $R_{T0} \approx R_{T0}$ išraiškas (2.23), (2.26). Pasitikrinkite pagal jas skaičiavimų rezultatus.

2.10. Plokščioji EM banga, kurios dažnis 3 GHz, sklinda lygiagrečiai vakuume ir polietilene su $\epsilon_{rp} = 2,25$. Apskaičiuokite v_f , λ , β , R_T abiem terpėms, laikydami jas idealiosiomis. Palyginkite skaičiavimų duomenis ir rezultatus lentelėje, suformuluokite išvadas apie terpių įtaką bangos parametrams.

Sprendimas: Plokščiosios EM bangos fazinis greitis vakuume lygus šviesos greičiui – $v_{f0} = c_0 \approx 3 \cdot 10^8$ m/s. Bangos ilgis vakuume randamas pagal formulę (2.13) skaičiuojant mintinai:

$$\lambda_0 (\text{m}) \approx 300 / f (\text{MHz}) = 300 / 3 \cdot 10^3 = 0,1 \text{ m}.$$

Bangos fazės koeficientas vakuume skaičiuojamas pagal (2.21):

$$\beta_0 = 2\pi / \lambda_0 = 2\pi / 0,1 = 20\pi = 62,8 \text{ rad/m}.$$

Vakuomo banginė varža yra žinoma – $R_{T0} = 120\pi \approx 377 \Omega$.

Kiek kitaip skaičiuojami analogiški nemagnetiniame dielektrike polietilene ($\mu_{rp} = 1$) sklindančios bangos parametrai su indeksu p :

$$v_{fp} = c_0 / \sqrt{\epsilon_{rp} \mu_{rp}} = 3 \cdot 10^8 / \sqrt{2,25 \cdot 1} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

$$\lambda_p = v_{fp} / f = 2 \cdot 10^8 / 3 \cdot 10^9 = 0,067 \text{ m},$$

$$\beta_p = 2\pi / \lambda_p = 2\pi / 0,067 = 30,3\pi = 94,2 \text{ rad/m},$$

$$R_p = R_{T0} \sqrt{\mu_{rp} / \epsilon_{rp}} = 120\pi \sqrt{1/2,25} = 80\pi \approx 251 \text{ } \Omega.$$

Taip nustatyti plokščiosios EM bangos vakuume ir polietilene parametrai įrašomi į jų palyginimo 2.2 lentelę.

2.2 lentelė. Plokščiosios EM bangos parametrai

Terpė \ Parametrai, vnt.	ϵ_r	μ_r	v_f , m/s	λ , m	β , rad/m	R_T , Ω
Vakuumas	1	1	$3 \cdot 10^8$	0,1	62,8	377
Polietilenas	2,25	1	$2 \cdot 10^8$	0,067	94,2	251

Išvados: 1) plokščiosios EM bangos fazinis greitis, ilgis, fazės koeficientas vakuume ir jo banginė varža lygūs analogiškiems šviesos parametrams vakuume, nes šviesa taip pat yra EM bangos;

2) plokščiosios bangos fazinis greitis, ilgis vakuume ir jo banginė varža $\sqrt{2,25} = 1,5$ karto didesni, o fazės koeficientas 1,5 karto mažesnis negu polietilene, nes vakuumo santykinė dielektrinė skvarba yra 2,25 karto mažesnė negu polietileno;

3) polietilenas vėlina ir ilgina plokščiąją EM bangą, didina jos fazės pokytį nueito kelio metrui ir turi mažesnę banginę varžą 1,5 karto bangos vakuume atžvilgiu, nes yra tankesnis.

2.11. Apskaičiuokite kaip ir 2.10, tik EM bangai, kurios dažnis 6 GHz, sklindančiai lygiagrečiai polistirene ir steatite.

Atsakymas: EM bangos polistirene ir steatite parametrų palyginimo 2.3 lentelė.

2.3 lentelė. Plokščiosios EM bangos parametrai

Terpė \ Parametrai, vnt.	ϵ_r	μ_r	v_f , m/s	λ , m	β , rad/m	R_r , Ω
Polistirenas	2,55	1	$1,88 \cdot 10^8$	0,031	202,7	236
Steatitas	6	1	$1,22 \cdot 10^8$	0,020	314,2	154

2.12. *Plokščioji EM banga, kurios dažnis 10 GHz, sklinda lygiagrečiai ore ir lydytame kvarce su $\epsilon_{rk} = 4$. Apskaičiuokite v_f , λ , α , β ir atstumą z , per kurį bangos fazė pasikeičia kampų $\Delta \varphi = 270^\circ$, abiem terpėms, laikydami jas idealiosiomis. Palyginkite skaičiavimų duomenis ir rezultatus lentelėje, suformuluokite išvadas apie terpių įtaką bangos parametrams.*

Sprendimas: Plokščiosios EM bangos ilgis ore pagal formulę (2.13) skaičiavimui mintinai yra:

$$\lambda_o(\text{m}) \approx 300 / f(\text{MHz}) \approx 300 / (10^4) \approx 0,03 \text{ m.}$$

Bangos fazės koeficientas ore randamas pagal išraišką (2.21):

$$\beta_o = 2\pi / \lambda_o = 2\pi / 0,03 \approx 66,7\pi \approx 209,3 \text{ rad/m.}$$

Bangos fazės pokytis ore gaunamas kaip fazės koeficiento ir sklidimo kelio sandauga bei išreiškiama laipsniais arba radianais:

$$\Delta\varphi(z_o) = \beta_o z_o = 270^\circ = 1,5\pi \approx 4,7 \text{ rad.}$$

Iš to galima rasti bangos sklidimo kelią ore:

$$z_o = \Delta\varphi(z_o) / \beta_o \approx 1,5\pi / 66,7\pi \approx 0,022 \text{ m.}$$

Kiek kitaip skaičiuojami analogiškai nemagnetiniame dielektrike kvarce ($\mu_{rk} = 1$) sklindančios bangos parametrai su indeksu k :

$$v_{fk} = c_0 / \sqrt{\epsilon_{rk} \mu_{rk}} = 3 \cdot 10^8 / \sqrt{4 \cdot 1} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s,}$$

$$\lambda_k = v_{fk} / f = 1,5 \cdot 10^8 / 10^{10} = 0,015 \text{ m,}$$

$$\beta_k = 2\pi / \lambda_k = 2\pi / 0,015 = 133,3\pi \approx 418,7 \text{ rad/m,}$$

$$\Delta\varphi(z_k) = \beta_k z_k = 270^\circ = 1,5\pi \approx 4,7 \text{ rad},$$

$$z_k = \Delta\varphi(z_k) / \beta_k \approx 1,5\pi / 133,3\pi = 0,011 \text{ m}.$$

Plokščiosios bangos silpimo koeficientai ore ir lydytame kvarce, laikant terpes idealiosiomis, yra lygūs nuliui – $\alpha_o = \alpha_k = 0$. Taip nustatyti plokščiosios EM bangos ore ir lydytame kvarce parametrai įrašomi į jų palyginimo 2.4 lentelę.

2.4 lentelė. Plokščiosios EM bangos parametrai

Terpė \ Parametrai, vnt.	ϵ_r	μ_r	v_f , m/s	λ , m	α , 1/m	β , rad/m	z , m
Oras	1	1	$3 \cdot 10^8$	0,03	0	209,3	0,022
Kvarcas	4	1	$1,5 \cdot 10^8$	0,015	0	418,7	0,011

Išvados: 1) plokščiosios EM bangos fazinis greitis, ilgis, silpimo ir fazės koeficientai bei fazės pokytis per tą patį atstumą ore apytikriai lygūs analogiškiems šviesos parametrams vakuume, nes šviesa taip pat yra elektromagnetinės bangos.

2) plokščiosios bangos fazinis greitis, ilgis ir nueitas atstumas, kol fazė pasikeičia 270° , ore $\sqrt{4} = 2$ karto didesni, o fazės koeficientas 2 kartus mažesnis negu lydytame kvarce, nes oro santykinė dielektrinė skvarba yra 4 kartus mažesnė negu kvarco. Kvarcas vėlina ir trumpina bangą, didina jos fazės koeficientą ir mažina nueitą atstumą, kol fazė pasikeičia tiek pat, 2 kartus bangos ore atžvilgiu.

3) plokščiosios bangos silpimo koeficientai ore ir lydytame kvarce yra vienodi ir lygūs nuliui, t. y. banga juose nesilpsta, laikant, kad abi terpės yra idealieji dielektrikai.

2.13. Apskaičiuokite kaip ir 2.12, tik EM bangai, kurios dažnis 15 GHz, sklindančiai stikle ir keramikoje, kai $\Delta\varphi = 450^\circ$.

Atsakymas: EM bangos stikle ir keramikoje parametų palyginimo 2.5 lentelė.

2.5 lentelė. Plokščiosios EM bangos parametrai

Terpė \ Parametrai, vnt.	ϵ_r	μ_r	v_f , m/s	λ , m	α , 1/m	β , rad/m	z , m
Stiklas	7,5	1	$0,8 \cdot 10^8$	0,0053	0	1185,5	0,0066
Keramika	9	1	$1 \cdot 10^8$	0,0067	0	937,8	0,0083

2.14. Apskaičiuokite plokščiosios EM bangos, kurios dažnis 20 GHz, fazinį greitį, ilgį ir skvarbos gylį realiosiose terpėse: ore, varėje ir geležyje. Vario savitasis laidis $\sigma_{Cu} = 5,8 \cdot 10^7$ S/m, geležies $\sigma_{Fe} = 10^7$ S/m, magnetinė skvarba $\mu_{rFe} = 8000$.

Sprendimas: EM bangos fazinis greitis ir ilgis ore apskaičiuojami pagal formules (2.23) ir (2.11):

$$v_{f0} = c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \lambda_o = v_{fo} / f \approx 3 \cdot 10^8 / 20 \cdot 10^9 = 0,015 \text{ m}.$$

Bangos skvarbos gylis sausame ore yra $\delta_o \approx \infty$.

Tuo tarpu realiuosiuose laidininkuose varėje ir geležyje pagal formules (2.31)–(2.33) gaunama:

$$v_{fCu} = \sqrt{2\omega / \mu_{Cu} \sigma_{Cu}} = \sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot 20 \cdot 10^9 / (1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,8 \cdot 10^7)} = 58700 \text{ m/s},$$

$$\lambda_{Cu} = v_{fCu} / f = 5,87 \cdot 10^4 / 20 \cdot 10^9 = 2,94 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$\delta_{Cu} = \lambda_{Cu} / 2\pi = 2,94 \cdot 10^{-6} / 2\pi = 0,47 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$v_{fFe} = \sqrt{2\omega / \mu_{Fe} \sigma_{Fe}} = \sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot 20 \cdot 10^9 / (8 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^7)} = 1580 \text{ m/s},$$

$$\lambda_{Fe} = v_{fFe} / f = 0,158 \cdot 10^4 / 20 \cdot 10^9 = 0,079 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$\delta_{Fe} = \lambda_{Fe} / 2\pi = 0,079 \cdot 10^{-6} / 2\pi \approx 0,013 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Taigi ore EM bangos fazinis greitis ir ilgis $\sim 5 \cdot 10^3$ kartų didesni negu varėje, o jame bangos greitis, ilgis ir įsiskverbimo gylis ~ 37 kartus didesni negu geležyje dėl jos žymiai didesnės magnetinės skverbties ir mažesnio laidžio. Geležyje gaunami didesni energijos nuostoliai ir ji EM įtaisuose nenaudojama, nes dėl ore esančios drėgmės rūdija.

3. PLOKŠČIŲJŲ ELEKTROMAGNETINIŲ BANGŲ POLIARIZACIJA NERIBOTOSE TERPĖSE

Teorinė dalis

Elektromagnetinės (EM) bangos neribotose terpėse dažniausiai yra orientuotos tam tikra kryptimi, nors gali būti ir neorientuotos, t. y. būti poliarizuotos arba nepoliarizuotos. Poliarizacija reiškia vyraujančiąją $\mathbf{E}$ ir $\mathbf{H}$ vektorių kryptį. Bangose šie vektoriai yra vienareikšmiai surišti tarpusavyje. Todėl apie elektromagnetinių bangų poliarizaciją sprendžiama pagal elektrinio lauko stiprio vektorių $\mathbf{E}$ orientaciją terpėse ir jos kitimą laike. Banga vadinama poliarizuotąja, jeigu bet kuriuo laiko momentu galima nurodyti jos $\mathbf{E}$ vektorių kryptis. Jeigu jos kinta atsitiktiniu dėsniu, tai sklinda nepoliarizuotoji banga. Plokštuma, kurioje yra elektrinio lauko stiprio $\mathbf{E}$ ir Pointingo $\mathbf{\Pi}$ (bangos sklidimo krypties) vektoriai, vadinama poliarizacijos plokštuma. Jeigu jos padėtis nejudančioje koordinatinių sistemoje išlieka pastovi, tai tokia poliarizacija vadinama tiesine, arba plokščiąja. Dar galimos apskritiminė ir elipsinė poliarizacijos.

EM bangos skirtingai poliarizuojamos, siekiant tais pačiais ryšio kanalais lygiagrečiai perduoti daugiau skirtingos informacijos. Tačiau skirtingai poliarizuotas bangas gali išskirti tik specialūs įrenginiai, skirti tam tikros poliarizacijos bangoms priimti.

Norimos poliarizacijos bangas galima gauti, sumuojant neribotose terpėse ta pačia kryptimi sklindančias dvi tiesiškai poliarizuotąsias bangas su statmenomis poliarizacijos plokštumomis. Tiesinė, apskritiminė arba elipsinė poliarizacija gaunamos atsižvelgiant į sumuojamųjų bangų amplitudžių ir pradinių fazių skirtumus. Pagrindiniai sumuojamųjų bangų amplitudžių ir pradinių fazių skirtumų deriniai parodyti 3.1 lentelėje, kur matyti, kad suminės bangos poliarizacijos rūšį lemia ne bangų amplitudės

$E_{ym} \neq E_{xm}$, o pirmiausia jų fazių skirtumas $\varphi_y - \varphi_x$. Dažniausia priima ma prielaida, kad $\varphi_x = 0$, ir gaunama $\varphi_y - \varphi_x = \varphi_y - 0 = \varphi_y$.

3.1 lentelė. Elektromagnetinių bangų poliarizacijos rūšys

Derinys	Amplitudės $E_{ym}, E_{xm} \neq 0$	Fazės, kai $n = 0, 1, 2, 3, \dots$	Poliarizacija
1	$E_{ym} \gg E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = \pm n\pi$, kai $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = \pm n\pi$	Tiesinė kampinė: ↗ $n = 0, 2, 4, \dots$ ↘ $n = 1, 3, 5, \dots$
2	$E_{ym} = E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = \pm(2n+1)\pi/2$, kai $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = \pm(2n+1)\pi/2$	Apskritiminė: (+) kairioji, (-) dešinioji
3	$E_{ym} \gg E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = \Delta\varphi \neq \pm n\pi \neq$ $\neq \pm(2n+1)\pi/2$, kai $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = \Delta\varphi \neq \pm n\pi \neq$ $\neq \pm(2n+1)\pi/2$	Elipsinė pasviroji: (+) kairioji – k, (-) dešinioji – d
3.1	$E_{ym} = E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = \pm(2n+1)\pi/2$, kai $\varphi_x = 0$ $\varphi_y = \pm(2n+1)\pi/2$	Elipsinė horizontalioji: (+) k, (–) d
3.2	$E_{ym} < E_{xm}$		Elipsinė vertikalioji: (+) k, (–) d

Sumuojamųjų bangų dažniai $\omega = 2\pi f$, faziniai greičiai v_f ir fazės koeficientai β terpėse turi būti vienodi ta pačia sklaidimo kryptimi. Silpimo koeficientai vienalytėse izotropinėse terpėse abiem bangoms taip pat bus vienodi ir neturės įtakos suminės bangos poliarizacijai. Todėl tariama, kad jie yra lygūs nuliui. Suminės bangos elektrinis laukas bus dviejų tiesiškai poliarizuotųjų bangų su tarpusavyje statmenomis poliarizacijos

plokštumomis elektrinių laukų tiesinė kombinacija. Stačiakampėje koordinatinių x, y, z sistemoje geometriškai sumuojami dviejų z ašies kryptimi sklindančių harmoninių bangų tarpusavyje statmeni elektrinių laukų stiprio vektoriai su bendriausiu atveju skirtingomis amplitudėmis E_{xm}, E_{ym} ir pradinėmis fazėmis φ_x, φ_y . Taip gaunamas suminės bangos elektrinio lauko stiprio vektorius:

$$\mathbf{E}_\Sigma(z, t) = \mathbf{E}_x(z, t) + \mathbf{E}_y(z, t) = \mathbf{e}_x E_{xm} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x) + \mathbf{e}_y E_{ym} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y). \quad (3.1)$$

Šio vektoriaus modulis bus:

$$|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| = \sqrt{[E_{xm} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x)]^2 + [E_{ym} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y)]^2}. \quad (3.2)$$

Kampas θ , kurį sudaro suminis vektorius $\mathbf{E}_\Sigma(z, t)$ su sumuojamosios bangos vektoriumi $\mathbf{E}_x(z, t)$, aprašomas lygtimi:

$$\theta = \arctg \frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} = \arctg \frac{E_{ym} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y)}{E_{xm} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x)}. \quad (3.3)$$

Toliau nagrinėsime atskiras elektromagnetinių bangų poliarizacijos rūšis pagal konkrečias užduotis.

3.1. Tiesinė (plokščioji) poliarizacija

Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

3.1. Išveskite $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)|$ ir θ išraiškas, kai E_{ym} ir E_{xm} yra bet kokios, nelygios nuliui, $\varphi_y - \varphi_x = -\pi$. Nubraižykite $\mathbf{E}_x(t)$, $\mathbf{E}_y(t)$, $|\mathbf{E}_\Sigma(t)|$ grafikus. Nurodykite θ ir EM bangų poliarizacijos tipus.

Sprendimas: Priėmus prielaidą, kad $\varphi_x = 0$, gaunama $\varphi_y = -\pi$. Įvertinus tai ir 3.1 lentelės 1-ąjį derinį, nesunku prognozuoti, kad bus gauta tiesinė poliarizacija.

Pagal formulę (3.2) dviejų EM bangų su tarpusavyje statmenomis poliarizacijos plokštumomis suminės bangos elektrinio lauko stiprio vektoriaus modulis yra:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| &= \sqrt{[E_{xm} \cos(\omega t - \beta z + 0)]^2 + [E_{ym} \cos(\omega t - \beta z - \pi)]^2} = \\ &= \sqrt{[E_{xm} \cos(\omega t - \beta z)]^2 + [-E_{ym} \cos(\omega t - \beta z)]^2} = \\ &= \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2} \cdot |\cos(\omega t - \beta z)|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Galutinėje išraiškoje (3.4) rašomas harmoninio dėsno modulis $|\cos(\omega t - \beta z)|$, nes $\cos$ funkcija turi teigiamąsias ir neigiamąsias reikšmes, o suminio vektoriaus modulis turi būti teigiamasis. Todėl $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)|$ momentinės reikšmės kinta atsižvelgiant į laiką pagal išlygintos kosinusoidės dėsnį. Šią formulę galima būtų dar supaprastinti, turint sumuojamųjų EM bangų amplitudžių santykį arba konkrečias jų skaitines reikšmes. Tokia pat ji, tik be modulio ženklų, išlieka ir vektoriaus momentinių reikšmių $\mathbf{E}_\Sigma(z, t)$ atveju.

Kampą, kurį sudaro vektorius $\mathbf{E}_\Sigma(z, t)$ su sumuojamosios bangos vektoriumi $\mathbf{E}_x(z, t)$, aprašo lygtis (3.3). Iš jos gaunama:

$$\theta = \arctg \frac{E_{ym} \cos(\omega t - \beta z - \pi)}{E_{xm} \cos(\omega t - \beta z + 0)} = \arctg \frac{-E_{ym} \cos(\omega t - \beta z)}{E_{xm} \cos(\omega t - \beta z)} = -\arctg \frac{E_{ym}}{E_{xm}}. \quad (3.5)$$

Šis kampas turi būti neigiamasis ir jį lemia tik sumuojamųjų EM bangų elektrinio stiprio amplitudžių santykis. Turint jį arba konkrečias skaitines amplitudžių reikšmes, nesunku rasti θ .

Grafinės dalies atlikimo metodiką iliustruoja 3.1 pav. Braizant ranka patogiu naudoti milimetrinę arba languotą popierių. Pradžioje A4 formato lape nubraižomos 4 koordinačių sistemos. Iš jų 3 yra beveik vienodos ir skiriasi tik orientacija (3.1 pav. *a*, *b*, *d*). Kairėje braižomos 2 horizontalios sistemos (3.1 pav. *a*, *d*), kurių koordinačių pradžios ir ašių kryptys turi sutapti. Dešinėje braižoma vertikali sistema (3.1 pav. *b*) su koordinačių pradžia viduryje tarp horizontalių sistemų. Šios 3 sistemos skirtos pavaizduoti sumuojamųjų ir suminės EM bangų elektrinio lauko stiprio vektorių kitimą laike. Atitinkamai pažymimos šių kintamųjų ašys. Viršutiniame dešiniajame kampe viršutinės horizontalios ir šoninės vertikalios sistemų ašių sankirtoje braižoma x, y, z koordinačių sistema ir pažymimos jos ašys. Čia labai svarbu nesupainioti ašių: $\mathbf{E}_x(t)$ ir x ašys turi būti vertikalios ir lygiagretės tarpusavyje, $\mathbf{E}_y(t)$ ir y ašys – horizontalios ir taip pat lygiagretės.

3.1 pav. *a*, *b*, *d* sistemų laiko ašyse atidedamas vienas pilnas harmoninio virpesio periodas, kuris atitinka fazės pokytį 2π ir turi būti visur vienodas, nes virpesių dažniai turi sutapti. Jis visur padalijamas ne mažiau kaip į 8, geriau į 12, 16, 20 lygių dalių, kartotinių periodo ketvirčių skaičiui 4 ir užduotyse nurodytam sumuojamųjų EM bangų fazių skirtumui pusperiodžio dalimis (čia π , kitais atvejais $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/5$ ir t. t.). Po to nuo laiko ašių pradžių paeiliui sunumeruojami 0–8, 12, 16, 20 laiko momentai ir tais momentais nubraižomi ploni statmenys laiko ašims. Tai laiko momentų linijos.

3.1 pav. *a*, *b* elektrinių laukų stiprių ašyse atidedamos ir nurodomos užduotos arba pasirinktos stiprių amplitudės norimu masteliu. Po to abipus laiko ašių nubraižomos jas atitinkančios plonos punktyrinės momentinių

stiprių linijos, lygiagrečios laiko ašims ir kertančios laiko momentų linijas bei x, y ašis. Apskaičiuojamos kitos momentinės stiprių reikšmės ir taip pat nubraižomos punktyrinės stiprių linijos iki susikirtimų su laiko momentų linijomis. Taip paruošiami koordinačių tinkleliai visose 3.1 pav. sistemose.

Po to 3.1 pav. a punktyru nubraižoma kosinusoidė visada su $\varphi_x = 0$, pagal kurią nustatoma 3.1 pav. b virpesio pradžia. Tam nuo kosinusoidės $\mathbf{E}_x(t)$ pradžios 0 momentu atidedamas fazės kampas φ_y .

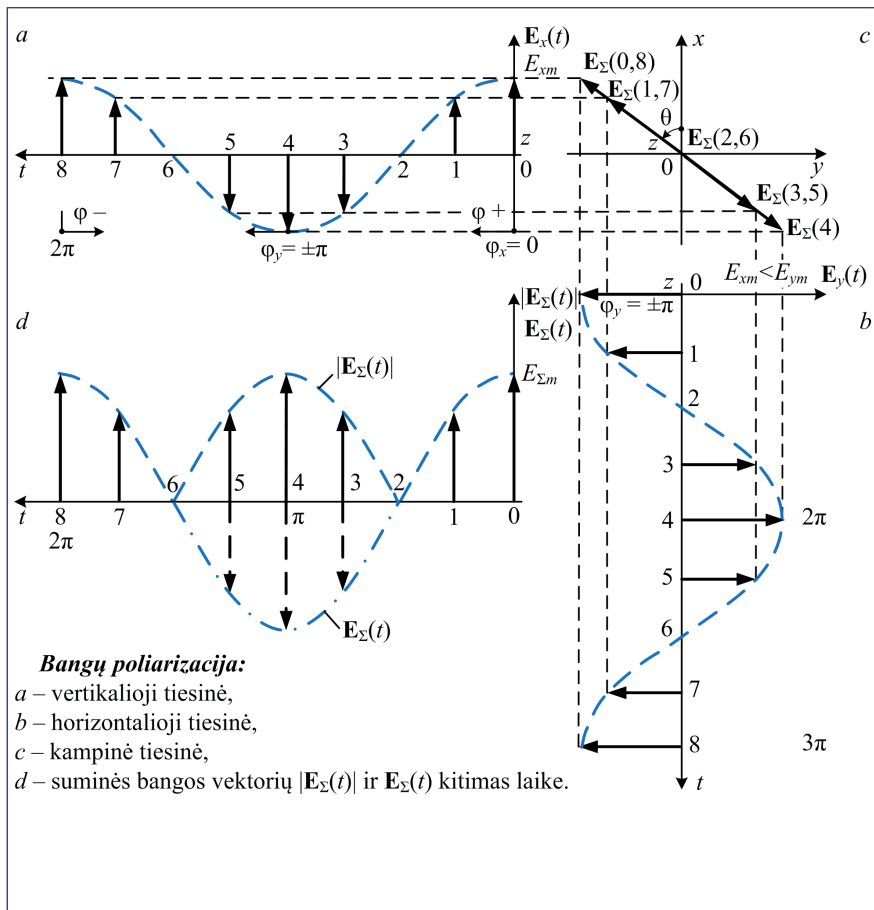
Jeigu φ_y teigiamasis, tai atidedamas laiko ašies teigiamąją kryptimi ($+t \leftarrow +\varphi_y$), neigiamasis – neigiamąją kryptimi ($-\varphi_y \rightarrow -t$). Pastaruoju atveju tai nepatogu, nes į dešinę nuo laiko 0 momento nėra kosinusoidės

(), kurią reikia įsivaizduoti. Bet neigiamuosius φ_y galima atidėti į dešinę nuo kosinusoidės galo 8 laiko momentu, atitinkančiu $\varphi_x = 2\pi$. Tačiau svarbiausia yra, suradus kosinusoidės $\mathbf{E}_y(t)$ pradžią pagal $\mathbf{E}_x(t)$ koordinačių sistemą tam tikru laiko momentu, perkelti ją į sistemos $\mathbf{E}_y(t)$ pradžią 0 momentu.

Konkrečiai šios užduoties atveju reikia nuo kosinusoidės $\mathbf{E}_x(t)$ galo 8 laiko momentu atidėti $\varphi_y = -\pi$ neigiamąją laiko ašies kryptimi iki 4 momento. Jį atitinka $\mathbf{E}_x(t)$ neigiamoji amplitudės reikšmė. Nuo tokios ir reikia pradėti kosinusoidę $\mathbf{E}_y(t)$ 0 laiko momentu bei tęsti ją teigiamąją laiko ašies kryptimi abiejose koordinačių sistemose. Taip suderinamos $\mathbf{E}_x(t)$ ir $\mathbf{E}_y(t)$ pradinės fazės. Tačiau jų amplitudės gali skirtis pagal užduotį ir tai reikia įvertinti, braižant kosinusoidę $\mathbf{E}_y(t)$ per laiko momentų ir stiprio linijų susikirtimo taškus.

Dabar jau galima nubraižyti elektrinio lauko stiprio vektorius atitinkamai laiko momentais nuo laiko ašių iki susikirtimo su kosinusoidėmis $\mathbf{E}_x(t)$ ir $\mathbf{E}_y(t)$ atitinkamai laiko momentais. Po to reikia geometriškai sumuoti vektorius $\mathbf{E}_x(t)$ ir $\mathbf{E}_y(t)$ 3.1 pav. c koordinačių sistemoje tais pačiais laiko momentais, sekant punktyrinėmis jų stiprio linijomis. Taip gaunami suminės bangos elektrinio lauko stiprio vektoriai $\mathbf{E}_\Sigma(t)$ kiekvienu nuo 0 iki 8, 12, 16, 20 laiko momentu. Dar reikia nurodyti kampą θ nuo x ašies iki vektoriaus $\mathbf{E}_\Sigma(0)$ 0 laiko momentu. Po to apskaičiuoti arba išmatuoti vektorių $\mathbf{E}_\Sigma(t)$ ilgius, pvz., skriestuvu ir atidėti atitinkamai

laiko momentais 3.1 pav. *d*. Be to, jame nubraižyti momentinius $\mathbf{E}_\Sigma(t)$ arba modulį $|\mathbf{E}_\Sigma(t)|$ vektorius ir sujungti jų galus gaubtine linija.



3.1 pav. $\mathbf{E}_x(t)$, $\mathbf{E}_y(t)$, $|\mathbf{E}_\Sigma(t)|$, $\mathbf{E}_\Sigma(t)$ kitimo laike grafikai kampinės tiesinės poliarizacijos atveju

3.1 pav. *a* pavaizduota vertikaliai tiesiškai poliarizuota banga, *b* – horizontalios tiesinės poliarizacijos atvejis, *c* – kaip gaunama kampinė

tiesinė poliarizacija, d – kaip kinta laike suminės kampų tiesiškai poliarizuotos bangos elektrinio lauko stiprio vektoriaus modulis ir momentinės reikšmės. Tai nėra vertikaliosios tiesinės poliarizacijos grafikas.

3.2. Atlikite kaip 3.1, kai E_{ym} ir E_{xm} yra bet kokios, nelygios nuliui, ir $\varphi_y - \varphi_x = 0$.

Atsakymas: Išstudijuokite šios užduoties sprendimą [12] ir palyginkite su užduoties 3.1 sprendimu. Šios užduoties atveju:

$$|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2} \cdot |\cos(\omega t - \beta z)|, \quad \theta = \arctg E_{ym} / E_{xm}.$$

3.3. Atlikite kaip 3.1, kai $E_{ym} = E_{xm} = E_m$, $\varphi_y - \varphi_x = -2\pi$.

Atsakymas: Dėmesio, prašoma išvesti momentinės reikšmės išraišką $\mathbf{E}_\Sigma(t) = \sqrt{2}E_m \cdot \cos(\omega t - \beta z)$, o ne jos modulį ir nubraižyti ją atitinkantį grafiką $\theta = 45^\circ$.

3.4. Atlikite kaip 3.1, kai $E_{ym} = E_{xm} / \sqrt{3}$, $\varphi_y - \varphi_x = \pi$.

Atsakymas: $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| = 2E_{xm} \cdot |\cos(\omega t - \beta z)| / \sqrt{3}, \quad \theta = -30^\circ.$

3.5. Nustatykite $\varphi_y - \varphi_x$, E_{ym} / E_{xm} , išveskite $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)|$ išraišką, kai $\theta = 60^\circ$. Toliau atlikite kaip 3.1.

Atsakymas: $\varphi_y - \varphi_x = 2\pi, \quad |\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| = 2E_{xm} \cdot |\cos(\omega t - \beta z)|,$

$E_{ym} / E_{xm} = \sqrt{3}$. Šią užduotį galima spręsti grafiškai nuo suminės bangos elektrinio lauko stiprio vektoriaus braižymo 3.1 pav. c, kai $\theta = 60^\circ$. Pagal jį nubraižyti kosinusoidę $\mathbf{E}_x(t)$ ir kitus grafikus.

3.2. Apskritiminė poliarizacija

Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

3.6. Išveskite $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)|$ ir θ išraiškas, kai $E_{ym} = E_{xm} = E_m$, $\varphi_y - \varphi_x = \pi/2$. Nubraižykite $E_x(t)$, $E_y(t)$, $|\mathbf{E}_\Sigma(t)|$ grafikus. Nurodykite θ ir EM bangų poliarizacijos tipus.

Sprendimas: Pagal užduoties sąlygą gaunama, kad esant $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = \pi/2$. Įvertinus tai ir 3.1 lentelės 2-ąją derinį, aišku, kad bus gauta apskritiminė kairioji poliarizacija.

Tuomet pagal formulę (3.2) suminės bangos elektrinio lauko stiprio vektoriaus modulis yra:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| &= \sqrt{[E_{xm} \cos(\omega t - \beta z + 0)]^2 + [E_{ym} \cos(\omega t - \beta z + \pi/2)]^2} = \\ &= \sqrt{[E_m \cos(\omega t - \beta z)]^2 + [-E_m \sin(\omega t - \beta z)]^2} = \\ &= \sqrt{E_m^2 [\cos^2(\omega t - \beta z) + \sin^2(\omega t - \beta z)]} = \sqrt{E_m^2 \cdot 1} = E_m. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Taigi suminio vektoriaus modulis ir momentinės reikšmės (ilgis) nekinta laike t , nepriklauso nuo koordinatės z ir lygus nustatytoms sumuojamųjų laukų stiprių amplitudėms, kurios yra vienodos.

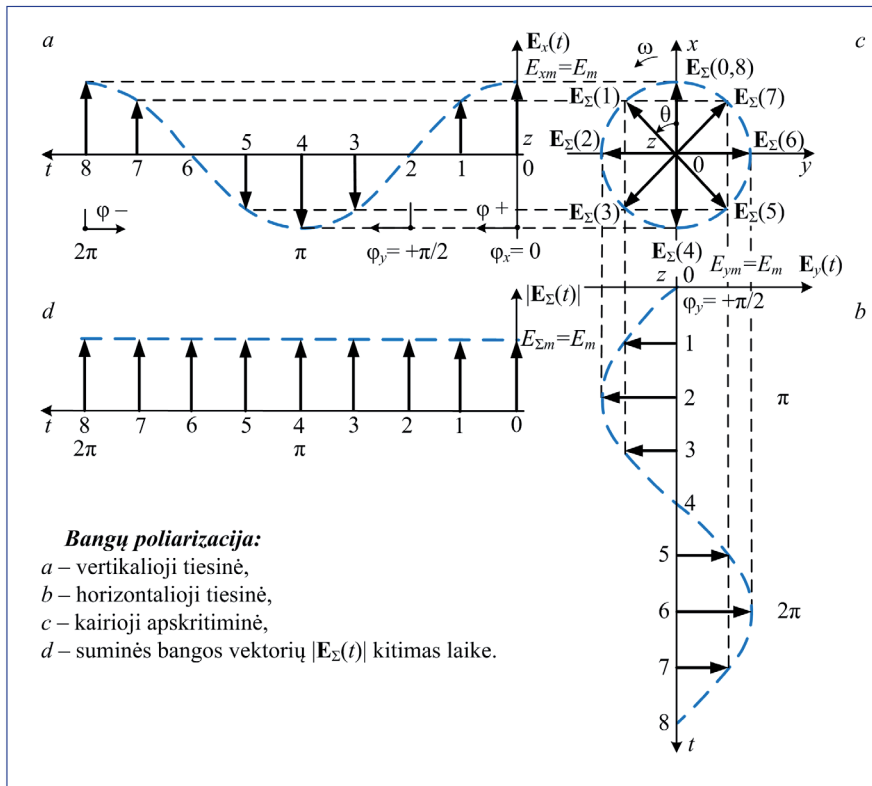
Kampą, kuri sudaro suminis vektorius su sumuojamosios bangos vektoriumi $\mathbf{E}_x(z, t)$, aprašo formulė (3.3). Iš jos gaunama:

$$\begin{aligned} \theta &= \arctg \frac{E_{ym} \cos(\omega t - \beta z + \pi/2)}{E_{xm} \cos(\omega t - \beta z + 0)} = \arctg \frac{-E_m \sin(\omega t - \beta z)}{E_m \cos(\omega t - \beta z)} = \\ &= -\arctg [\tg(\omega t - \beta z)] = -(\omega t - \beta z). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Išraiška (3.7) rodo, kad šis kampas yra neigiamasis ir kinta tiesiog proporcingai laikui t bei sumuojamųjų ir suminės bangų nueitam atstumui

z , esant pastoviams kampiniam dažniui ω ir bangų fazės koeficientui β . Tai reiškia, kad suminės bangos elektrinio lauko stiprio vektorius sukasi pastoviu kampiniu dažniu aplink t ir z ašis, o jo galas brėžia terpėje cilindrinę apskritą kairiąją spiralę.

Grafinės dalies atlikimo metodika: Ją iliustruoja 3.2 pav. Metodika tokia pati, kaip ir 3.1 pav., tad čia nekartojama.



3.2 pav. $\mathbf{E}_x(t)$, $\mathbf{E}_y(t)$, $|\mathbf{E}_\Sigma(t)|$ kitimo laike grafikai kairiosios apskritiminės poliarizacijos atveju

Pagal šią užduotį gaunama, kad, esant $\varphi_x = 0$, turi būti $\varphi_y = \pi/2$. Tai reiškia, kad 3.2 pav. *a* kosinusoidės grafike reikia nuo 0 momento atidėti teigiamąją laiko ašies kryptimi teigiamąją fazės kampą $\varphi_y = \pi/2$ iki 2 momento. Nuo jo turi prasidėti $\mathbf{E}_y(t)$ neigiamosios sinusoidės grafikas 3.2 pav. *b*. Jį reikia atskaityti $\mathbf{E}_x(t)$ grafike teigiamąją laiko ašies kryptimi ir atidėti $\mathbf{E}_y(t)$ grafike ta pačia kryptimi.

3.2 pav. *c* koordinatėse parodyta, kaip geometriškai sumuojami vektoriai $\mathbf{E}_x(t)$ ir $\mathbf{E}_y(t)$ bei gaunamas suminis pastovaus ilgio vektorius $|\mathbf{E}_\Sigma(t)|$ įvairiais laiko momentais. Jis tolygiai sukasi kampiniu dažniu ω prieš laikrodžio rodyklę x, y, z koordinačių sistemoje, kintant neigiamajam kampui θ . Čia, kitaip, nei dauguma atvejų elektromagnetinio lauko teorijoje, teigiamieji kampai ir teigiamosios apėjimo kryptys atskaitomi pagal laikrodžio rodyklę. Taip gaunama apskritiminė kairioji suminės EM bangos poliarizacija.

3.2 pav. *d* koordinačių sistemoje pateiktas suminio stiprio vektoriaus modulio $|\mathbf{E}_\Sigma(t)|$ kitimo, teisingiau nekitimo, laike grafikas. Po juo nurodyti visų EM bangų poliarizacijų tipai.

3.7. Atlikite kaip 3.6, kai $E_{ym} = E_{xm} = E_m$, $\varphi_y - \varphi_x = -\pi/2$.

Atsakymas: Išstudijuokite šios užduoties sprendimą [12] ir palyginkite su užduoties 3.6 sprendimu. Šios užduoties atveju $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| = E_m$, $\theta = \omega t - \beta z$.

3.8. Atlikite kaip 3.6, kai $E_{ym} = E_{xm} = E_m$, $\varphi_y - \varphi_x = 6\pi/4$.

Atsakymas: $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| = E_m$, $\theta = \omega t - \beta z$.

3.9. Suminės EM bangos poliarizacija yra kairioji apskritiminė, $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| = E_m$. Užrašykite θ , $E_{\Sigma m}$, E_{ym} , E_{xm} , φ_Σ , φ_x , φ_y išraiškas. Nubraižykite $E_x(t)$, $E_y(t)$, $|\mathbf{E}_\Sigma(t)|$ grafikus, nurodykite θ .

Atsakymas: $\theta = -(\omega t - \beta z)$, $E_m = E_{ym} = E_{xm} = E_m$, $\varphi_\Sigma = \varphi_x = n\pi$, $\varphi_y = (4n+1)\pi/2$, kai $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

3.3. Elipsinė poliarizacija

Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

3.10. Išveskite $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)|$ ir θ išraiškas, kai E_{ym} ir E_{xm} yra bet kokios, tik ne 0, ir $\varphi_y - \varphi_x = \Delta\varphi$ yra bet koks, tik ne $\pm(2n + 1) \cdot \pi/2$, $\pm n\pi$ (čia $n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Nubraižykite $\mathbf{E}_x(t)$, $\mathbf{E}_y(t)$, $|\mathbf{E}_\Sigma(t)|$ grafikus. Nurodykite θ ir EM bangų poliarizacijos tipus.

Sprendimas: Pagal užduoties sąlygą $\varphi_y - \varphi_x = \Delta\varphi$ gaunama, kad, kai $\varphi_x = 0$, tai $\varphi_y = \Delta\varphi \neq \pm(2n + 1) \cdot \pi/2 \neq \pm n\pi$, o $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Tuomet iš formulės (3.2) gaunamas suminės bangos elektrinio lauko stiprio vektoriaus modulis:

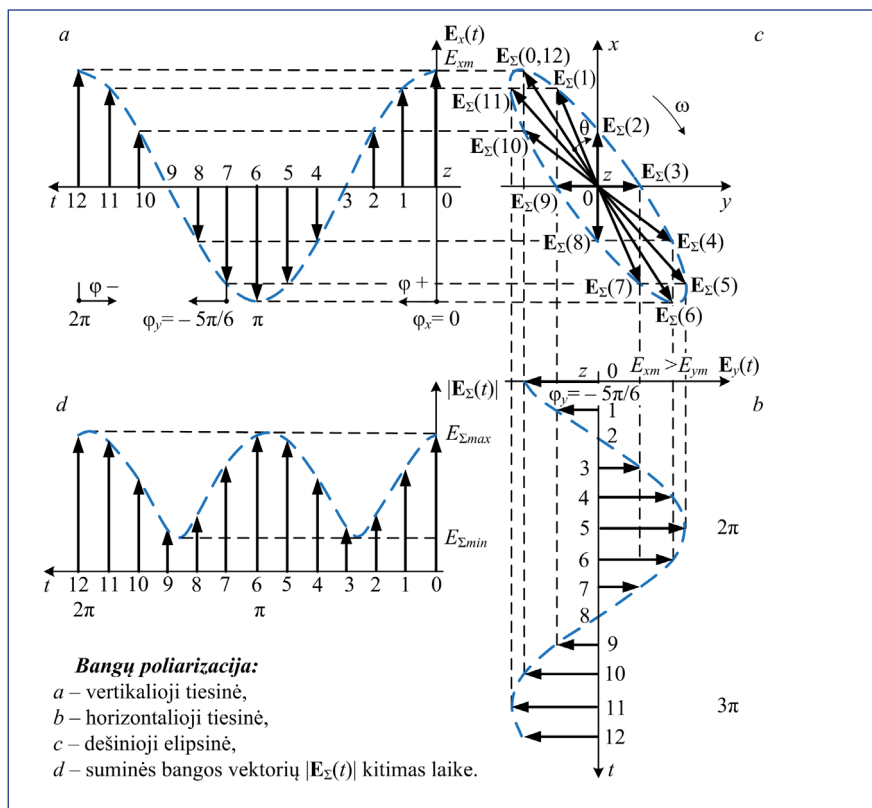
$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| &= \sqrt{[E_{xm} \cos(\omega t - \beta z + 0)]^2 + [E_{ym} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y)]^2} = \\ &= \sqrt{[E_{xm} \cos(\omega t - \beta z)]^2 + [E_{ym} \cos(\omega t - \beta z + \Delta\varphi)]^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Poliarizacijos plokštumos posūkio kampas θ , kurį sudaro suminės EM bangos elektrinio lauko stiprio vektorius $\mathbf{E}_\Sigma(z, t)$ su sumuojamosios bangos vektoriumi $\mathbf{E}_x(z, t)$, aprašomas formule (3.3). Ją pritaikius šiuo atveju gaunama:

$$\theta = \arctg \frac{E_{ym} \cos(\omega t - \beta z + \Delta\varphi)}{E_{xm} \cos(\omega t - \beta z + 0)} = \arctg \frac{E_{ym} \cos(\omega t - \beta z + \Delta\varphi)}{E_{xm} \cos(\omega t - \beta z)}. \quad (3.9)$$

Nieko paprasčiau iš šių formulų pagal užduoties sąlygą išgauti negalima, nebent sulyginti ir suprastinti sumuojamųjų bangų amplitudes. Tačiau šių EM bangų harmoninės funkcijos skiriasi pradinėmis fazėmis ir tai lemia elipsinę suminės bangos poliarizaciją. Be konkretaus amplitudžių santykio ir pradinių fazių skirtumo sudėtinga prognozuoti elipsės formą,

padėti bei poliarizacijos kryptį. Ir 3.1 lentelė negali padėti. Todėl belieka pereiti prie sprendimo grafinės dalies (3.3 pav.).



3.3 pav. $E_x(t)$, $E_y(t)$, $|E_\Sigma(t)|$ kitimo laike grafikai dešinėsios elipsinės poliarizacijos atveju

Grafinės dalies atlikimo metodiką iliustruoja 3.3 pav. Ji tokia pati, kaip ir 3.1, 3.2 pav. atvejais, tad čia nekartojama. Pagal šią užduotį pasirinkta, kad esant $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = \Delta\varphi$ turi būti tokia, kad 3.3 pav. *a* kosinusoidės grafike reikia nuo 0 momento atidėti teigiamąją laiko ašies kryptimi

teigiamąjį fazės kampą arba nuo 12 momento atidėti neigiamąją laiko ašies kryptimi neigiamąjį fazės kampą $\varphi_y = -5\pi/6$ abiem atvejais iki 7 momento. Nuo jo turi prasidėti $\mathbf{E}_y(t)$ harmoninės funkcijos su neigiamąja momentine reikšme grafikas 3.3 pav. *b*. Jį reikia atskaityti $\mathbf{E}_x(t)$ grafike teigiamąją laiko ašies kryptimi ir atidėti $\mathbf{E}_y(t)$ grafike ta pačia kryptimi.

Pasirinkta $\mathbf{E}_x(t)$ kosinusoidės amplitudė yra didesnė už funkcijos $\mathbf{E}_y(t)$ amplitudę. Geometriškai sudėjus šių funkcijų aprašomus elektrinių laukų stiprių vektorius tais pačiais laiko momentais, 3.3 pav. *b* koordinačių sistemoje gaunama kampu ašių atžvilgiu išdėstyta gana siaura ilga elipsė. Joje vektoriai, išdėstyti laiko momentų didėjimo tvarka, sukasi pastoviu kampiniu dažniu ω pagal laikrodžio rodyklę aplink laiko t ir visų bangų sklidimo krypties z ašis. Vektorių galai brėžia terpėje cilindrinę dešiniąją elipsinę spiralę, didėjant poliarizacijos plokštumos posūkio kampui θ .

Tačiau šiuo atveju nėra vektorių pačiuose elipsės galuose, nors laiko momentų skaičius $\mathbf{E}_x(t)$, $\mathbf{E}_y(t)$ grafikuose buvo specialiai padidintas nuo 8 iki 12, palyginti su 3.1 ir 3.2 pav. Tai neleidžia tiksliau atkurti elipsės 3.3 pav. *b* ir suminės bangos modulių 3.3 pav. *d*.

3.11. Atlikite kaip 3.10, kai $E_{ym} = E_{xm} = E_m$, $\varphi_y - \varphi_x = \pi/4$.

Atsakymas: $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| = E_m \sqrt{\cos^2(\omega t - \beta z) + \cos^2(\omega t - \beta z + \pi/4)},$
 $\theta = \arctg[\cos(\omega t - \beta z + \pi/4)/\cos(\omega t - \beta z)].$

3.12. Atlikite kaip 3.10, kai $E_{ym} = \sqrt{3}E_{xm}$, $\varphi_y - \varphi_x = \pi/2$.

Atsakymas: $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| = E_{xm} \sqrt{\cos^2(\omega t - \beta z) + 3\sin^2(\omega t - \beta z)},$
 $\theta = -\arctg[\sqrt{3} \operatorname{tg}(\omega t - \beta z)].$

3.13. Atlikite kaip 3.10, kai $\sqrt{3}E_{ym} = E_{xm}$, $\varphi_y - \varphi_x = -\pi/2$.

Atsakymas: $|\mathbf{E}_\Sigma(z, t)| = E_{xm} \sqrt{\cos^2(\omega t - \beta z) + \sin^2(\omega t - \beta z)/3},$

$$\theta = \arctg \left[\operatorname{tg}(\omega t - \beta z) / \sqrt{3} \right].$$

3.14. *Suminės EM bangos poliarizacija yra elipsinė kairioji. Elipsė yra vertikali, o jos ašių santykis $\sqrt{3}$. Užrašykite $\mathbf{E}_\Sigma(z, t)$, θ , E_{ym} , E_{xm} , φ_Σ , φ_x , φ_y išraiškas. Nubraižykite $\mathbf{E}_x(t)$, $\mathbf{E}_y(t)$, $|\mathbf{E}_\Sigma(t)|$ grafikus, nurodykite θ .*

Atsakymas: Dėmesio, prašoma užrašyti $\mathbf{E}_\Sigma(z, t)$ išraišką.

$$\mathbf{E}_\Sigma(z, t) = E_{xm} \left[\mathbf{e}_x \cos(\omega t - \beta z) - \mathbf{e}_y \sin(\omega t - \beta z) / \sqrt{3} \right],$$

$$\theta = -\arctg \left[\operatorname{tg}(\omega t - \beta z) / \sqrt{3} \right], \quad \sqrt{3}E_{ym} = E_{xm},$$

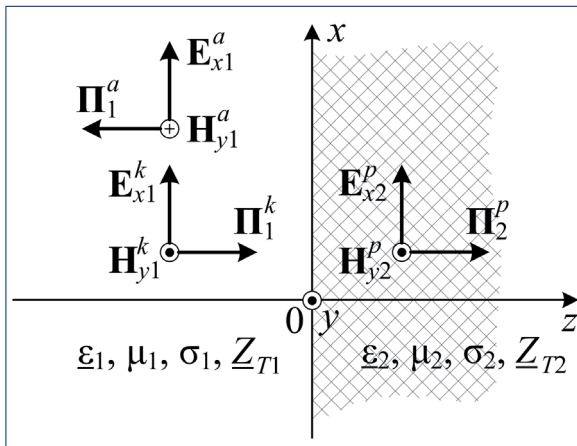
$$\varphi_\Sigma = \varphi_x = n\pi, \quad \varphi_y = (4n+1)\pi/2, \quad \text{kai } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Daugiau įvairių bangų poliarizacijos užduočių pateikta 1.1 priede.

4. PLOKŠČIŲJŲ ELEKTROMAGNETINIŲ BANGŲ ATSPINDYS NUO DVIEJŲ TERPIŲ RIBOS IR INTERFERENCIJA

Teorinė dalis

Tarkime, plokščioji elektromagnetinė (EM) banga krinta iš 1 terpės į 2 terpę statmenai jas skiriančiai plokštumai (4.1 pav.). Terpių duomenys ϵ_1 , μ_1 , σ_1 ir ϵ_2 , μ_2 , σ_2 yra žinomi. Reikia apskaičiuoti EM laukus abiejose terpėse. Koordinačių sistema parenkama taip, kad jos pradžia ($z = 0$) sutaptų su terpių ribine plokštuma, ašis z eitų krintančiosios EM bangos sklaidimo kryptimi, ašis x būtų lygiagreti vektoriui $\mathbf{E}_{x1}^k$.



4.1 pav. Plokščioji EM banga krinta statmenai į plokščią dviejų terpių ribą

Tada krintančioji (k), atspindėtoji (a) ir perėjusioji (p) bangos turės tą pačią poliarizaciją, t. y. jų elektrinio lauko stiprio vektoriai $\mathbf{E}_{x1}^k$, $\mathbf{E}_{x1}^a$, $\mathbf{E}_{x2}^p$ bus lygiagretūs tarpusavyje, koordinačių ašiai x ir ribinei plokštumai.

Šių bangų magnetinio lauko stiprio vektoriai bus lygiagretūs y ašiai, bet $\mathbf{H}_{y1}^k, \mathbf{H}_{y1}^a$ bus priešingi dėl priešingų Pointingo vektorių $\mathbf{\Pi}_1^k, \mathbf{\Pi}_1^a$ krypčių (4.1 pav.).

Įvertinus tai ir ribines sąlygas plokštumoje $x0y$, galima užrašyti:

$$\mathbf{e}_x \left(\underline{E}_{x1}^k + \underline{E}_{x1}^a \right) = \mathbf{e}_x \underline{E}_{x2}^p, \quad \mathbf{e}_y \left(\underline{H}_{y1}^k - \underline{H}_{y1}^a \right) = \mathbf{e}_y \underline{H}_{y2}^p. \quad (4.1)$$

Greta ribinių sąlygų kiekvienai bangai galioja lygybės:

$$\underline{E}_{x1}^k = \underline{Z}_{T1} \underline{H}_{y1}^k, \quad \underline{E}_{x1}^a = \underline{Z}_{T1} \underline{H}_{y1}^a, \quad \underline{E}_{x2}^k = \underline{Z}_{T2} \underline{H}_{y2}^k. \quad (4.2)$$

Toliau įvedamos atspindžio nuo terpių ribos $\underline{p}_r$ ir jos perėjos $\underline{q}_E, \underline{q}_H$ koeficientų sąvokos bei išraiškos, užrašytos kaip kompleksiniai santykiniai dydžiai rodyklene forma per modulius ir argumentus:

$$\underline{p}_r = \frac{\underline{E}_{x1}^a(0)}{\underline{E}_{x1}^k(0)} = \frac{\underline{E}_{x1m}^a e^{j\varphi_{E1}^a(0)}}{\underline{E}_{x1m}^k e^{j\varphi_{E1}^k(0)}} = -\frac{\underline{H}_{y1}^a(0)}{\underline{H}_{y1}^k(0)} = \frac{\underline{H}_{y1m}^a e^{j\varphi_{H1}^a(0)}}{\underline{H}_{y1m}^k e^{j\varphi_{H1}^k(0)}} = \left| \underline{p}_r \right| e^{j\varphi_{pr}},$$

$$\left| \underline{p}_r \right| = \underline{E}_{x1m}^a / \underline{E}_{x1m}^k = \underline{H}_{y1m}^a / \underline{H}_{y1m}^k, \quad (4.3)$$

$$\varphi_{pr} = \varphi_{E1}^a(0) - \varphi_{E1}^k(0) = \varphi_{H1}^a(0) - \varphi_{H1}^k(0).$$

$$\underline{q}_E = \frac{\underline{E}_{x2}^p(0)}{\underline{E}_{x1}^k(0)} = \frac{\underline{E}_{x2m}^p e^{j\varphi_{E2}^p(0)}}{\underline{E}_{x1m}^k e^{j\varphi_{E1}^k(0)}} = \left| \underline{q}_E \right| e^{j\varphi_{qE}},$$

$$\left| \underline{q}_E \right| = \frac{\underline{E}_{x2m}^p}{\underline{E}_{x1m}^k}, \quad \varphi_{qE} = \varphi_{E2}^p(0) - \varphi_{E1}^k(0),$$

(4.4)

$$\underline{q}_H = \frac{\underline{H}_{y2}^p(0)}{\underline{H}_{y1}^k(0)} = \frac{\underline{H}_{y2m}^p e^{j\varphi_{H2}^p(0)}}{\underline{H}_{y1m}^k e^{j\varphi_{H1}^k(0)}} = \left| \underline{q}_H \right| e^{j\varphi_{qH}},$$

$$\left| \underline{q}_H \right| = \frac{\underline{H}_{y2m}^p}{\underline{H}_{y1m}^k}, \quad \varphi_{qH} = \varphi_{H2}^p(0) - \varphi_{H1}^k(0).$$

Ištačius į $\underline{q}_E$, $\underline{q}_H$ (4.4) išraiškas (4.1) sąlygas, gaunama:

$$\underline{q}_E = 1 + \underline{p}_r, \quad \underline{q}_H = 1 - \underline{p}_r, \quad \underline{q}_E + \underline{q}_H = 2 = \text{const.} \quad (4.5)$$

Padalijus (4.1) pirmąją lygtį iš antrosios ir įvertinus (4.3)–(4.5) bus:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{T1} \frac{1 + \underline{p}_r}{1 - \underline{p}_r} &= \underline{Z}_{T2}, \quad \text{iš čia} \quad \underline{p}_r = \frac{\underline{Z}_{T2} - \underline{Z}_{T1}}{\underline{Z}_{T2} + \underline{Z}_{T1}}, \\ \underline{q}_E &= \frac{2\underline{Z}_{T2}}{\underline{Z}_{T2} + \underline{Z}_{T1}}, \quad \underline{q}_H = \frac{2\underline{Z}_{T1}}{\underline{Z}_{T2} + \underline{Z}_{T1}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nustačius tik vieną elektrinio lauko stiprio vektoriaus kompleksinės amplitudės reikšmę $\underline{E}_{x1}^k(0)$ ir terpių parametrus $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ bei $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$, apskaičiuojami $\underline{Z}_{T1}, \underline{Z}_{T2}, \underline{p}_r$ ir randamos bei patikrinamos kitų penkių elektromagnetinio lauko vektorių kompleksinių amplitudžių reikšmės terpes skiriančioje riboje ($z = 0$):

$$\begin{aligned} \underline{H}_{y1}^k(0) &= \underline{E}_{x1}^k(0) / \underline{Z}_{T1}, \quad \underline{E}_{x1}^a(0) = \underline{p}_r \underline{E}_{x1}^k(0), \\ \underline{H}_{y1}^a(0) &= \underline{p}_r \underline{H}_{y1}^k(0) = \underline{E}_{x1}^a(0) / \underline{Z}_{T1}, \\ \underline{E}_{x2}^p(0) &= (1 + \underline{p}_r) \underline{E}_{x1}^k(0) = \underline{q}_E \underline{E}_{x1}^k(0), \\ \underline{H}_{y2}^p(0) &= \underline{E}_{x2}^p(0) / \underline{Z}_{T2} = (1 - \underline{p}_r) \underline{H}_{y1}^k(0) = \underline{q}_H \underline{H}_{y1}^k(0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Bendriausiu atveju 1 terpėje vyks krintančiosios ir atspindėtosios EM bangų interferencija, o 2 terpėje, kuri laikoma neribota, sklis arba neskliis tik perėjusioji banga. Toliau nagrinėjami daliniai atvejai.

4.1. Banga krinta iš idealiojo dielektriko statmenai į idealiojo dielektriko plokštumą

Idealiųjų dielektrikų ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) banginės varžos $Z_{T1} = R_{T1}$ ir $Z_{T2} = R_{T2}$ yra realieji dydžiai. Šiuo atveju bangų atspindžio nuo terpių ribos koeficientas $\underline{p}_r = (R_{T2} - R_{T1}) / (R_{T2} + R_{T1}) = p_r$ irgi yra realusis dydis: 1) teigiamasis $0 < p_r < 1$, kai $R_{T2} > R_{T1}$, 2) neigiamasis $0 > p_r > -1$, kai $R_{T2} < R_{T1}$, ir 3) nulinis $p_r = 0$, kai $R_{T2} = R_{T1}$. Pastarasis variantas galimas, kai 1, 2 terpės nesiskiria ir nėra ribos tarp jų. Arba terpių duomenys skiriasi vienodą skaičių kartų, pvz., $\mu_2 = 2\mu_1$ ir $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ bei yra riba tarp skirtingų terpių, bet nėra atspindėtosios nuo jos bangos dėl $R_{T2} = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2} = \sqrt{2\mu_1/2\varepsilon_1} = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} = R_{T1}$.

Tuo tarpu perėjos koeficientai q_E , q_H yra realieji, teigiamieji ir ne didesni už 2 dydžiai, be to, vienam iš jų didėjant, kitas mažėja taip, kad patenkinama sąlyga $q_E + q_H = 2 = \text{const}$.

Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

4.1. *Plokščia EM banga, kurios dažnis 10 GHz, krinta statmenai į plokščią 1 ir 2 terpių ribą. Apskaičiuokite atspindžio nuo terpių ribos koeficientą $\underline{p}_r$, perėjos koeficientus $\underline{q}_E$, $\underline{q}_H$, nurodykite atspindėtosios, perėjusiosios ir krintančiosios bangų amplitudžių santykius, kai 1 terpė yra vakuumas, o 2 terpė – idealusis dielektrikas su $\varepsilon_{r2} = 4$, $\mu_{r2} = 1$. Pagal amplitudžių santykius ir bangų ilgius nubraižykite elektrinio ir magnetinio laukų stiprio amplitudžių $E_{xm}(z)$, $H_{ym}(z)$ pasiskirstymo išilgai bangos sklidimo krypties z grafikus vienoje koordinatinių sistemoje. Grafikuose nurodykite EM*

bangų režimus (bėgančiųjų bangų – BB, stovinčiųjų – SB, mišriųjų – MB, nėra bangų – NB) 1 ir 2 terpėse.

Sprendimas: Apskaičiuojamos 1 ir 2 terpių banginės varžos:

$$\underline{Z}_{T1} = R_{T1} = R_{T0} \sqrt{\mu_{r1}/\varepsilon_{r1}} = 120\pi \sqrt{1/1} = 120\pi \approx 377 \quad \Omega,$$

$$\underline{Z}_{T2} = R_{T2} = R_{T0} \sqrt{\mu_{r2}/\varepsilon_{r2}} = 120\pi \sqrt{1/4} = 60\pi \approx 189 \quad \Omega.$$

Randomi atspindžio nuo terpių ribos bei jos perėjos koeficientai:

$$\begin{aligned} \underline{p}_r &= p_r = (R_{T2} - R_{T1}) / (R_{T2} + R_{T1}) = (60\pi - 120\pi) / (60\pi + 120\pi) = \\ &= -1/3 = E_{x1m}^a(0) / E_{x1m}^k(0) = -H_{y1m}^a(0) / H_{y1m}^k(0), \end{aligned}$$

$$\underline{q}_E = q_E = 1 + p_r = 1 - 1/3 = 2/3 = E_{x2m}^p(0) / E_{x1m}^k(0),$$

$$\underline{q}_H = q_H = 1 - p_r = 1 - (-1/3) = 4/3 = H_{y2m}^p(0) / H_{y1m}^k(0).$$

Patikrinami $\underline{q}_E$, $\underline{q}_H$ skaičiavimų rezultatai:

$$\underline{q}_E + \underline{q}_H = q_E + q_H = 2/3 + 4/3 = 2.$$

Apskaičiuojamos laukų stiprių 1 ir 2 terpėse amplitudės:

Tarkime, ant terpių ribos ($z = 0$) yra $E_{x1m}^k(0) = 3 \text{ V/m}$. Tada:

$$E_{x1m}^a(0) = |p_r| \cdot E_{x1m}^k(0) = |-1/3| \cdot 3 = 1 \text{ V/m}.$$

Skaiciuojamos suminės mišriosios bangos (MB), gautos 1 terpėje interferuojant skirtingų amplitudžių krintančiajai ir atspindėtajai bangoms, elektrinio lauko stiprio mažiausia ir didžiausia amplitudės:

$$E_{x1m}^{\Sigma \min} = E_{x1m}^k(0) - E_{x1m}^a(0) = 3 - 1 = 2 \text{ V/m},$$

$$E_{x1m}^{\Sigma \max} = E_{x1m}^k(0) + E_{x1m}^a(0) = 3 + 1 = 4 \text{ V/m}.$$

Skaiciuojama elektrinio lauko stiprio 2 terpėje amplitudė:

$$E_{x2m}^p(0) = q_E \cdot E_{x1m}^k(0) = (2/3) \cdot 3 = 2 \text{ V/m}.$$

Patikrinamos elektrinių laukų stiprio 2 ir 1 terpėse amplitudės pagal ribinę sąlygą:

$$E_{x2m}^p(0) = E_{x1m}^k(0) - E_{x1m}^a(0) = 3 - 1 = 2 \text{ V / m.}$$

Skaiciuojamos magnetinių laukų stiprio 1 terpėje amplitudės:

$$H_{y1m}^k(0) = E_{x1m}^k(0) / R_{T1} = 3 / 377 = 0,0079 \text{ A / m} = 7,9 \text{ mA / m,}$$

$$H_{y1m}^a(0) = |p_r| \cdot H_{y1m}^k(0) = |-1/3| \cdot 0,0079 = 0,0026 \text{ A / m} = 2,6 \text{ mA / m.}$$

Patikrinama $H_{y1m}^a(0)$ pagal $E_{x1m}^a(0)$ ir R_{T1} :

$$H_{y1m}^a(0) = E_{x1m}^a(0) / R_{T1} = 1 / 377 = 0,0026 \text{ A / m} = 2,6 \text{ mA / m.}$$

Skaiciuojamos suminės mišriosios bangos (MB) 1 terpėje magnetinio lauko stiprio mažiausia ir didžiausia amplitudės:

$$\begin{aligned} H_{y1m}^{\Sigma \min} &= H_{y1m}^k(0) - H_{y1m}^a(0) = 0,0079 - 0,0026 = \\ &= 0,0053 \text{ A / m} = 5,3 \text{ mA / m,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{y1m}^{\Sigma \max} &= H_{y1m}^k(0) + H_{y1m}^a(0) = 0,0079 + 0,0026 = \\ &= 0,0105 \text{ A / m} = 10,5 \text{ mA / m.} \end{aligned}$$

Skaiciuojama magnetinio lauko stiprio 2 terpėje amplitudė:

$$H_{y2m}^p(0) = q_H \cdot H_{y1m}^k(0) = (4/3) \cdot 0,0079 = 0,0105 \text{ A / m} = 10,5 \text{ mA / m.}$$

Patikrinama $H_{y2m}^p(0)$ pagal $E_{x2m}^p(0)$ ir R_{T2} :

$$H_{y2m}^p(0) = E_{x2m}^p(0) / R_{T2} = 2 / 189 = 0,0105 \text{ A / m} = 10,5 \text{ mA / m.}$$

Patikrinamos magnetinių laukų stiprio 2 ir 1 terpėse amplitudės pagal ribinę sąlygą:

$$\begin{aligned} H_{y2m}^p(0) &= H_{y1m}^k(0) + H_{y1m}^a(0) = 0,0079 + 0,0026 = \\ &= 0,0105 \text{ A / m} = 10,5 \text{ mA / m.} \end{aligned}$$

Apskaiciuojami EM bangų ilgiai 1 ir 2 terpėse:

$$\lambda_1 = v_{f1} / f = c_0 / f = 3 \cdot 10^8 / 10 \cdot 10^9 = 0,030 \text{ m} = 3 \text{ cm,}$$

$$\lambda_2 = v_{f2} / f = c_0 / (f \cdot \sqrt{\epsilon_{r2} \cdot \mu_{r2}}) = 3 \cdot 10^8 / (10 \cdot 10^9 \sqrt{4 \cdot 1}) = 0,015 \text{ m} = 1,5 \text{ cm}.$$

Elektrinio ir magnetinio laukų stiprio amplitudžių $E_{xm}(z)$, $H_{ym}(z)$ pasiskirstymo 1 ir 2 terpėse išilgai bangos sklidimo krypties z grafikai pateikti 4.2 pav. Jame ant terpių ribos parodyti ir krintančiosios, atspindėtosios bei perėjusiosios EM bangų elektrinio ir magnetinio laukų stiprio vektoriai. Grafikai ir vektoriai nubraižyti pagal nurodytus atitinkamų dydžių mastelius. Juos rekomenduojama rinktis iš eilės 1 : 1, 1 : 2, 1 : 5, 1 : 10 arba 2 : 1, 5 : 1, 10 : 1 ir t. t.

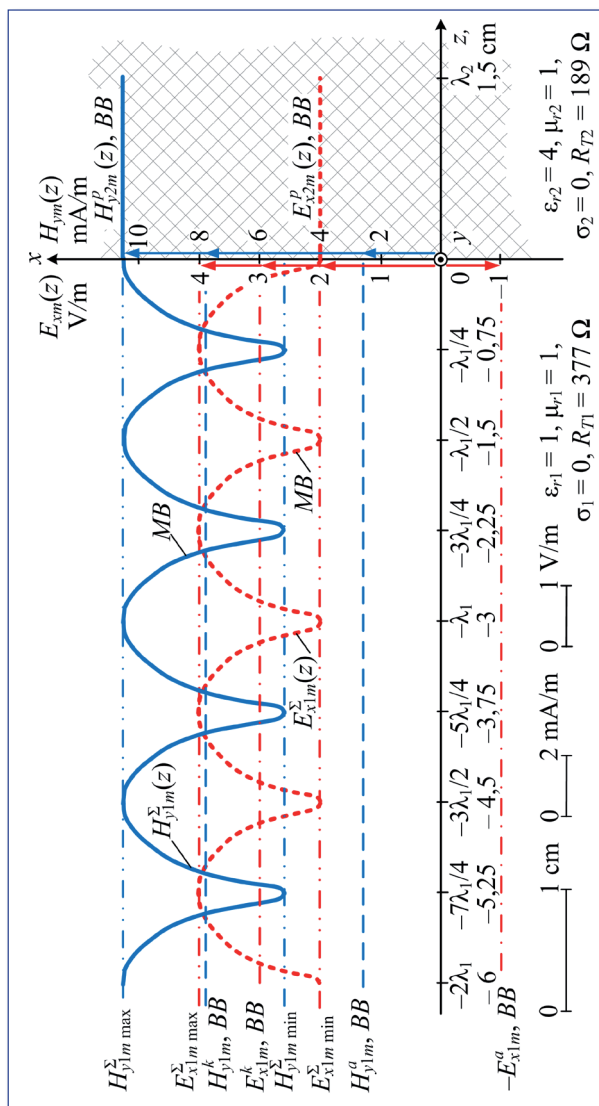
Terpėje 1 sklindančioms krintančiajai ir atspindėtajai bangoms būdingas bėgančiųjų bangų (BB) režimas su nekintama amplitude.

Interferuojant skirtingų amplitudžių krintančiajai ir atspindėtajai bangoms, terpėje 1 susidaro suminė mišrioji banga (MB), kuriai būdingi pakaitomis besikeičiantys elektrinio ir magnetinio laukų stiprio amplitudžių $E_{xm}(z)$, $H_{ym}(z)$ minimumai ir maksimumai.

Kai $R_{T1} > R_{T2}$, kaip šiuo atveju, elektrinio lauko stipris ant 1 ir 2 terpių ribos yra minimalus, nes krintančiosios ir atspindėtosios bangų vektoriai yra priešingų krypčių ir atsiima. Magnetinio lauko stipris yra maksimalus, nes krintančiosios ir atspindėtosios EM bangų vektoriai yra vienodų krypčių ir susideda. Jeigu ribinėje plokštumoje nėra krūvių ir srovių, joje negali įvykti laukų stiprio šuolių. Tad 2 terpėje sklinda tik viena perėjusioji (bėgančioji BB) banga su nekintama amplitude, gauta ant terpių ribos.

4.2. Atlikite kaip 4.1, kai 1 terpė yra vakuumas, o 2 terpė – idealusis magnetodielektrikas su $\epsilon_{r2} = 1$, $\mu_{r2} = 4$.

Atsakymas: Kai $R_{T1} < R_{T2}$, kaip gaunama pagal šią užduotį, elektrinio lauko stipris ant 1 ir 2 terpių ribos yra maksimalus, o magnetinio lauko stipris – minimalus [12].



4.2 pav. Plokščioji EM banga krinta statmenai į 1 ir 2 terpių ribinę plokštumą: abi terpės idealieji dielektrikai, $R_{T1} > R_{T2}$

Daugiau analogiškų užduočių pateikta 1.1 priede.

4.2. Banga krinta iš idealiojo dielektriko statmenai į idealiojo laidininko plokštumą

Kai dielektrikas idealusis, jo $\sigma_1 = 0$ ir $Z_{T1} = R_{T1}$. Idealiojo laidininko banginė varža $Z_{T2} = 0 \cdot e^{i\pi/4}$. Tokiu atveju:

$$\underline{p}_r = -1, \underline{E}_1^a(0) = -\underline{E}_1^k(0), \underline{H}_1^a(0) = \underline{H}_1^k(0). \quad (4.8)$$

Taigi, kai EM banga krinta iš idealiojo dielektriko statmenai į idealiojo laidininko plokštumą, banga pilnai atsispindi. Atspindėtosios ir krintančiosios bangų amplitudės ant terpių ribos yra vienodos, elektrinių laukų kryptys – priešingos, o magnetinių laukų – sutampa.

Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

4.3. Atlikite kaip 4.1, kai 1 terpė yra vakuumas, o 2 terpė – idealusis laidininkas.

Sprendimas: Apskaičiuojamos 1 ir 2 terpių banginės varžos:

$$Z_{T1} = R_{T1} = R_{T0} \sqrt{\mu_{r1}/\varepsilon_{r1}} = 120\pi \sqrt{1/1} = 120\pi \approx 377 \ \Omega.$$

Idealiojo laidininko banginės varžos modulis $R_{T2} = 0 \ \Omega$.

Randomi atspindžio nuo terpių ribos bei jos perėjės koeficientai:

$$\underline{p}_r = p_r = (R_{T2} - R_{T1}) / (R_{T2} + R_{T1}) = (0 - 120\pi) / (0 + 120\pi) =$$

$$= -1 = E_{x1m}^a(0) / E_{x1m}^k(0) = -H_{y1m}^a(0) / H_{y1m}^k(0),$$

$$\underline{q}_E = q_E = 1 + p_r = 1 - 1 = 0 = E_{x2m}^p(0) / E_{x1m}^k(0),$$

$$\underline{q}_H = q_H = 1 - p_r = 1 - (-1) = 2 = H_{y2m}^p(0) / H_{y1m}^k(0).$$

Patikrinami $\underline{q}_E, \underline{q}_H$ skaičiavimų rezultatai:

$$\underline{q}_E + \underline{q}_H = q_E + q_H = 0 + 2 = 2.$$

Apskaičiuojamos laukų stiprio 1 ir 2 terpėse amplitudės:

Tarkime, ant terpių ribos ($z = 0$) yra $E_{x1m}^k(0) = 2 \text{ V / m}$. Tada:

$$E_{x1m}^a(0) = |p_r| \cdot E_{x1m}^k(0) = |-1| \cdot 2 = 2 \text{ V / m}.$$

Skaičiuojamos suminės stovinčiosios bangos (SB) 1 terpėje elektrinio lauko stiprio mažiausia ir didžiausia amplitudės:

$$E_{x1m}^{\Sigma \min} = E_{x1m}^k(0) - E_{x1m}^a(0) = 2 - 2 = 0 \text{ V / m},$$

$$E_{x1m}^{\Sigma \max} = E_{x1m}^k(0) + E_{x1m}^a(0) = 2 + 2 = 4 \text{ V / m}.$$

Skaičiuojama elektrinio lauko stiprio 2 terpėje amplitudė:

$$E_{x2m}^p(0) = q_E \cdot E_{x1m}^k(0) = 0 \cdot 2 = 0 \text{ V / m}.$$

Patikrinamos elektrinių laukų stiprio 2 ir 1 terpėse amplitudės:

$$E_{x2m}^p(0) = E_{x1m}^k(0) - E_{x1m}^a(0) = 2 - 2 = 0 \text{ V / m}.$$

Skaičiuojamos magnetinių laukų stiprio 1 terpėje amplitudės:

$$H_{y1m}^k(0) = E_{x1m}^k(0) / R_{T1} = 2 / 377 = 0,0053 \text{ A / m} = 5,3 \text{ mA / m},$$

$$H_{y1m}^a(0) = |p_r| \cdot H_{y1m}^k(0) = |-1| \cdot 0,0053 = 0,0053 \text{ A / m} = 5,3 \text{ mA / m}.$$

Patikrinama $H_{y1m}^a(0)$ pagal elektrinio lauko stiprį ir 1 terpės banginę varžą:

$$H_{y1m}^a(0) = E_{x1m}^a(0) / R_{T1} = 2 / 377 = 0,0053 \text{ A / m} = 5,3 \text{ mA / m}.$$

Skaičiuojamos suminės stovinčiosios bangos (SB) 1 terpėje magnetinio lauko stiprio mažiausia ir didžiausia amplitudės:

$$H_{y1m}^{\Sigma \min} = H_{y1m}^k(0) - H_{y1m}^a(0) = 0,0053 - 0,0053 = 0 \text{ A / m} = 0 \text{ mA / m},$$

$$H_{y1m}^{\Sigma \max} = H_{y1m}^k(0) + H_{y1m}^a(0) = 0,0053 + 0,0053 = 0,0106 \text{ A / m} = 10,6 \text{ mA / m}.$$

Skaiciuojama magnetinio lauko stiprio 2 terpėje amplitudė:

$$H_{y2m}^p(0) = q_H \cdot H_{y1m}^k(0) = 2 \cdot 0,0053 = 0,0106 \text{ A / m} = 10,6 \text{ mA / m}.$$

Patikrinti $H_{y2m}^p(0)$ pagal elektrinio lauko stiprį ir 2 terpės banginę varžą negalima, nes

$$H_{y2m}^p(0) = E_{x2m}^p(0) / R_{T2} = 0/0 = ??? \text{ mA / m}.$$

Patikrinamos magnetinių laukų stiprio 2 ir 1 terpėse amplitudės:

$$H_{y2m}^p(0) = q_H \cdot H_{y1m}^k(0) = 2 \cdot 0,0053 = 0,0106 \text{ A / m} = 10,6 \text{ mA / m}.$$

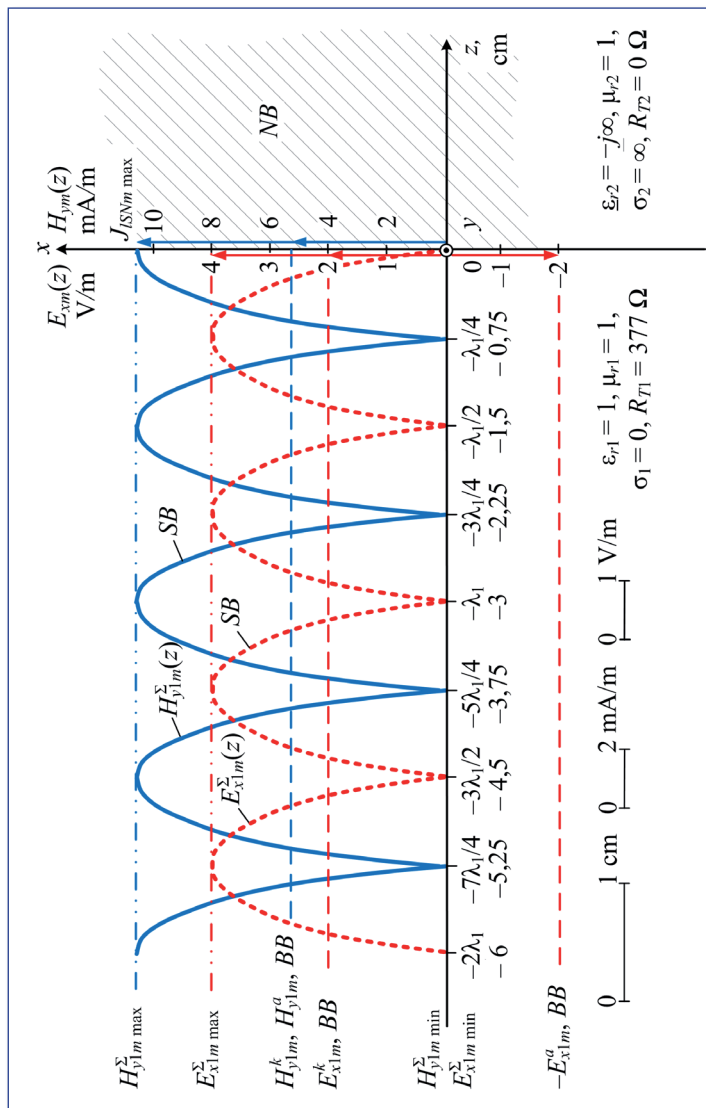
Apskaičiuojami bangų ilgiai 1 ir 2 terpėse:

$$\lambda_1 = v_{f1} / f = c_0 / f = 3 \cdot 10^8 / 10 \cdot 10^9 = 0,030 \text{ m} = 3 \text{ cm}.$$

$\lambda_2 = 0 \text{ cm}$, nes banga idealiajame laidininke nesklinda.

Elektrinio ir magnetinio laukų stiprio amplitudžių $E_{xm}(z)$, $H_{ym}(z)$ pasiskirstymo 1 ir 2 terpėse išilgai bangos sklaidimo krypties z grafikai pateikti 4.3 pav. Jame ant terpių ribos parodyti ir krintančiosios, atspindėtosios bei perėjusiosios EM bangų elektrinio ir magnetinio laukų stiprio vektoriai.

1 terpėje sklindančioms krintančiajai ir atspindėtajai bangoms būdingas bėgančiųjų bangų (*BB*) režimas su nekintama amplitude. Interferuojant vienodų amplitudžių krintančiajai ir atspindėtajai bangoms, 1 terpėje susidaro suminė stovinčioji banga (*SB*), kuriai būdingi pakaitomis besikeičiantys elektrinio ir magnetinio laukų stiprio amplitudžių $E_{xm}(z)$, $H_{ym}(z)$ mazgai (nuliai) ir pūpsniai (maksimumai su dviguba krintančiosios bangos amplitude). Elektrinio lauko stipris ant idealiojo laidininko paviršiaus yra lygus nuliui, o magnetinio lauko stipris – dvigubai krintančiosios bangos amplitudei ir laidžio paviršinės srovės tankio normalinės komponentės amplitudės maksimumui $J_{lSNm \max}$. 2 terpėje – idealiajame laidininke, EM bangos nesklinda, taigi nėra bangų (*NB*).



4.3 pav. Plokščioji EM banga krinta statmenai į 1 ir 2 terpių ribinę plokštumą:
1 terpė – vakuumas, 2 terpė – idealusis laidininkas

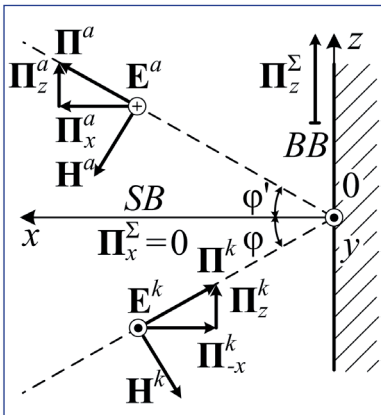
Daugiau analogiškų užduočių pateikta 1.1 priede.

4.3. Banga krinta iš idealiojo dielektriko nuožulniai į idealiojo laidininko plokštumą

Kai plokščioji banga krinta iš idealiojo dielektriko nuožulniai į idealiojo laidininko plokštumą, nėra perėjusiosios bangos, o atspindėtosios bangos amplitudė lygi krintančiosios bangos amplitudei, nes elektromagnetinis (EM) laukas į idealųjį laidininką neįsiskverbia.

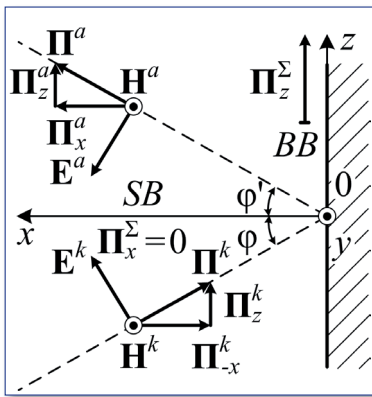
Kampas tarp krintančiosios bangos sklaidimo krypties ir statmens į ribinę plokštumą vadinamas kritimo kampu. Analogiškai apibrėžiamas atspindžio kampas. Plokščiosios bangos atspindžio kampas yra lygus jos kritimo kampui.

Krintančiąją bangą galima išreikšti dviejų tiesiškai poliarizuotųjų bangų su statmenomis poliarizacijos plokštumomis suma. Vienos iš jų elektrinio lauko stiprio vektorius yra lygiagretus ribinei plokštumai – $\mathbf{E}^k \parallel \mathbf{e}_y$ (4.4 pav.). Kitos bangos magnetinio lauko stiprio vektorius yra lygiagretus ribinei plokštumai – $\mathbf{H}^k \parallel \mathbf{e}_y$ (4.5 pav.).



4.4 pav. Plokščioji EM banga su $\mathbf{E}^k \parallel \mathbf{e}_y$ krinta nuožulniai į idealiojo laidininko plokštumą

4.4 pav. pavaizduoti krintančiosios ir atspindėtosios EM bangų vektoriai, kai $\mathbf{E}^k \parallel \mathbf{e}_y$. Jų kryptis galima paaiškinti ribinėmis sąlygomis [12]. Vektoriai $\mathbf{E}$ yra lygiagretūs ribinei plokštumai. Todėl suminis elektrinis laukas idealiojo laidininko paviršiuje turi būti lygus paviršinio krūvio tankiui – $\mathbf{E}^k + \mathbf{E}^a = \rho_S$. Kai krūvio nėra, gaunama $\mathbf{E}^k = -\mathbf{E}^a$. Pagal dešiniojo sraigto taisyklę, žinant vektorių $\mathbf{\Pi}^k$ ir $\mathbf{E}^k$, $\mathbf{\Pi}^a$ ir $\mathbf{E}^a$ kryptis, randamos vektorių $\mathbf{H}^k$ ir $\mathbf{H}^a$ kryptys.



4.5 pav. Plokščioji EM banga su $\mathbf{H}^k \parallel \mathbf{e}_y$ krinta nuo žolnui į idealiojo laidininko plokštumą

4.5 pav. pavaizduoti krintančiosios ir atspindėtosios EM bangų vektoriai, kai $\mathbf{H}^k \parallel \mathbf{e}_y$. Abudu vektoriai $\mathbf{H}$ yra lygiagretūs ribinei plokštumai. Todėl suminio magnetinio lauko stipris idealiojo laidininko paviršiuje turi būti lygus laidžio paviršinės srovės tankio normalinės komponentės amplitudės maksimumui – $\mathbf{H}^k - \mathbf{H}^a = \mathbf{J}_{lSm \max}$. Kai šios srovės nėra, $\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^a$. Pagal dešiniojo sraigto taisyklę, žinant vektorių $\mathbf{\Pi}^k$ ir $\mathbf{H}^k$, $\mathbf{\Pi}^a$ ir $\mathbf{H}^a$ kryptis, randamos elektrinių laukų stiprio vektorių $\mathbf{E}^k$ ir $\mathbf{E}^a$ kryptys.

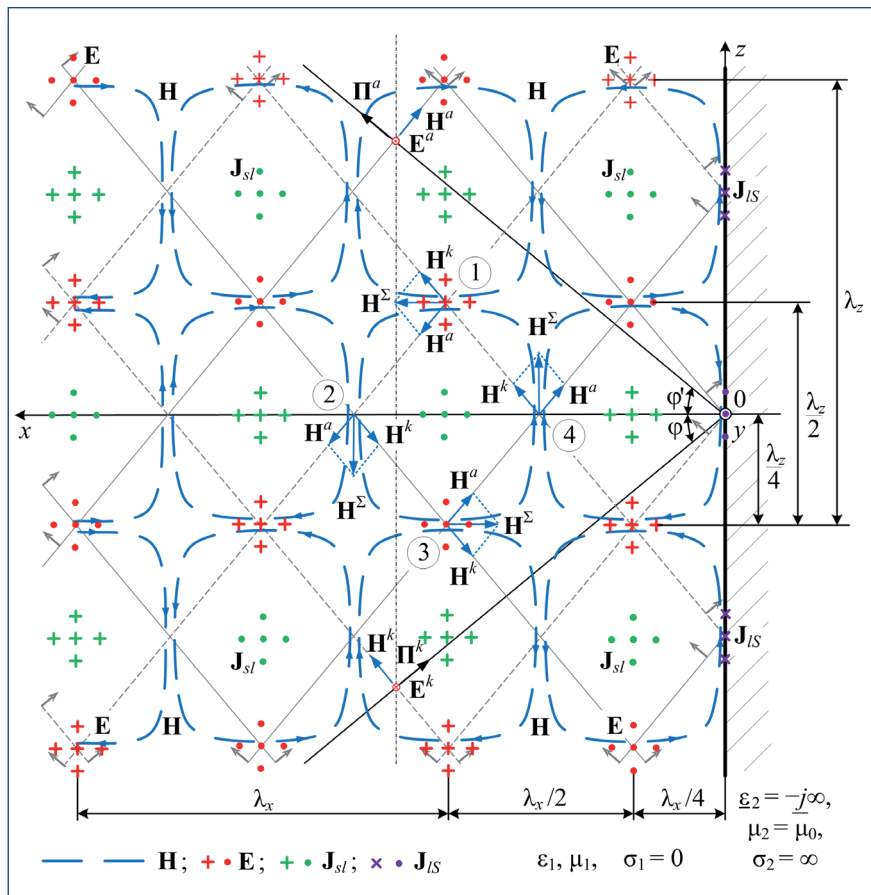
Abiem atvejais vektorius $\mathbf{\Pi}^k$ ir $\mathbf{\Pi}^a$ galima nagrinėti kaip vektorių $\mathbf{\Pi}_{-x}^k$, $\mathbf{\Pi}_z^k$ ir $\mathbf{\Pi}_x^a$, $\mathbf{\Pi}_z^a$ geometrinės sumas. Statmenai į idealųjį laidininką krintančioji banga (vektorius $\mathbf{\Pi}_{-x}^k$) interferuoja su statmenai atspindėtąja banga (vektorius $\mathbf{\Pi}_x^a$) ir gaunama stovinčioji banga (SB) x ašies kryptimi. Interferuojant lygiagrečiai idealiajam laidininkui sklindančioms bangoms (vektoriai $\mathbf{\Pi}_z^k$ ir $\mathbf{\Pi}_z^a$) gaunama bėgančioji banga (BB) z ašies kryptimi (4.4, 4.5 pav.).

Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

4.4. *Skirtingomis spalvomis viename paveiksle nubraižykite iš vakuumo nuožulniai kampų φ į idealiojo laidininko plokštumą krintančiosios ir atspindėtosios plokščiųjų bangų frontų tinklėlį su išskirtu rombu, vektorius $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{\Pi}$, suminio EM lauko vektorių $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}_{sl}$, $\mathbf{J}_{IS}$ linijas ir krūvius q_s , kai visi elektrinio lauko stiprio vektoriai yra lygiagretūs y ašiai – $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_y$.*

Sprendimas: Pateiktas 4.6 pav. Pradžioje nubraižoma x , y , z koordinatų sistema taip, kad 1 terpė užimtų bent 4/5 pav. pločio. Po to užrašomi 1, 2 terpių duomenys, 1 terpės vakuumas arba oras neštrichuojamas, kiti dielektrikai štrichuojami 45 laipsniais pasvirusiu stačiakampiu plonų ištisinųjų linijų tinkleliu, 2 srities laidininkas štrichuojamas 45 laipsnių kampų pasvirusiomis lygiagretėmis plonomis ištisinėmis linijomis. Toliau per koordinatų pradžios 0 tašką kampais $\varphi = \varphi'$ statmens į idealiojo laidininko paviršių (ašies x) atžvilgiu nubraižomos krintančiosios ir atspindėtosios EM bangų krypties linijos. Ant kiekvienos iš jų, pradedant nuo 0 koordinatų pradžios taško, atžymimi 3–4 vienodi krintančiosios ir atspindėtosios bangų ilgių pusbangiai. Per žymas braižomi plokščiųjų krintančiosios ir atspindėtosios bangų frontai, statmeni bangų krypties linijoms. Frontai atitinka elektromagnetinių laukų stiprių ekstremumus (4.6 pav.). Ištisinėmis linijomis vaizduojami maksimalias teigiamąsias stiprių reikšmes – bangų „keteras“ atitinkantys frontai, o brūkšninėmis linijomis – maksimalias neigiamąsias lauko stiprių reikšmes – bangų „įdubas“ atitinkantys frontai. Be to, laikoma, kad bangų „keterose“ elektrinio lauko linijos nukreiptos į mus ir jos žymimos taškais ($\odot$), o bangų „įdubose“ – nukreiptos nuo mūsų ir žymimos kryžiuokais ($\oplus$). Ypač svarbu teisingai pradėti braižyti frontus koordinatų pradžios 0 taške. Kai $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_y$, 0 taške turi sueiti ištisinis ir brūkšninis frontai, nesvarbu, kuris kuriai bangai. Tada patenkinama sąlyga $\mathbf{E}^k = -\mathbf{E}^a$. Toliau ištisiniai ir brūkšniniai frontai turi būti braižomi pakaitomis kas pusbangis ant kiekvienos iš bangų krypties linijų per visą

1 terpės užimamą paveikslą plotą. Taip gaunamas krintančiosios ir atspindėtosios EM bangų frontų tinklelis.



4.6 pav. Nuožulniai kampu φ į idealųjį laidininką krintančiosios ir atspindėtosios bangų frontų tinklelis, jo rombas, vektoriai $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{\Pi}$, suminio lauko vektorių $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}_s$, $\mathbf{J}_{IS}$ linijos (krūvių q_S nėra), kai $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_\nu$

Po to braižomos suminio elektrinio lauko stiprio E linijos. Taškuose, kur susikerta frontų ištisinės linijos su ištisinėmis arba brūkšninės su brūkšninėmis, krintančiosios ir atspindėtosios bangų elektriniai laukai yra fazėje ir todėl sumuojasi. Jų aplinkoje susidaro elektrinio lauko linijų gniūžtės (4.6 pav.). Ištisinių ir brūkšninių linijų susikirtimo taškuose krintančiosios ir atspindėtosios EM bangų elektrinių laukų fazės skiriasi dydžiu π . Suminis laukas šiuose taškuose yra lygus nuliui ir jų aplinkoje nėra elektrinio lauko linijų. Taip interferuojant nuožulniai į idealiojo laidininko plokštumą krintančiajai vienalytei bangai su atspindėtąja vienalyte banga, dielektrike prieš idealųjį laidininką susidaro suminė nevienalytė EM banga.

Toliau braižomos suminio magnetinio lauko linijos. Tam 4.6 pav. išskiriamas rombas su elektrinio lauko linijų gniūžtėmis vertikalioje įstrižainėje, apribotas dviem krintančiosios ir atspindėtosios bangų frontais. Jų susikirtimo 1, 2, 3, 4 taškuose pagal dešiniojo sraigto taisyklę randami vienodi krintančiosios bei atspindėtosios bangų magnetinio lauko stiprio vektoriai. Po to jie sumuojami geometriškai. Įvertinus, kad suminio lauko vektoriai $\mathbf{H}^\Sigma$ turi sutapti su linijos liestinėmis, braižoma uždara suminio magnetinio lauko linija – žiedas. Kiti rombai apibrėžiami analogiškais žiedais ir nurodomos jų kryptys, įvertinant, kad gretimų linijų kryptys turi būti vienodos, kitaip toje vietoje lauko nebūtų.

Slinkties srovių linijos braižomos pagal dešiniojo kumščio taisyklę magnetinio lauko žiedų centruose, o paviršinių laidžio srovių – idealiojo laidininko paviršiuje, greta kurio praeina lygiagretės magnetinio lauko linijos.

4.6 pav. suminio elektrinio lauko linijos yra lygiagretės Oy ašiai, nesiekia laidininko ir nueina į begalybę. Tad negalima pavaizduoti teigiamųjų paviršinių krūvių, iš kurių tos linijos turi išeiti, ir neigiamųjų krūvių, į kuriuos jos turi sueiti. Magnetinio lauko linijų žiedai sudaryti iš komponentių H_x ir H_z . Jos yra elektrinio lauko linijoms statmenoje plokštumoje. Komponentių H_x sutankėjimai sutampa su elektrinio lauko linijų gniūžtėmis. Jų vietose suminės EM bangos Pointingo vektorių kryptys

sutampa su ašies z kryptimi. Tai bėgančiosios išilgai idealiojo laidininko paviršiaus nevienalytės bangos požymiai. Bėgančiosios bangos (BB) ilgis yra λ_z . Mažiausias išilgai ašies z atstumas tarp elektrinio lauko gniūžčių su priešingomis kryptimis lygus $\lambda_z/2$. Atstumas tarp gretimų elektrinio lauko ir slinkties srovės linijų gniūžčių išilgai ašies z yra $\lambda_z/4$.

Suminio magnetinio lauko lygiagretės komponentės H_z sutankėja ten, kur nėra elektrinio lauko. Išilgai x ašies yra pjūviai, kuriuose šių laukų stipriai yra lygūs nuliui, ir pjūviai, kuriuose laukų stipriai visada maksimalūs, t. y. laukų stiprių amplitudės priklauso nuo koordinatės x . Idealiojo laidininko plokštumai statmena kryptimi Pointingo vektoriai negaunami. Tai būdingieji stovinčiosios bangos (SB), kurios ilgis λ_x , požymiai. Atstumas tarp dviejų artimiausių elektrinio lauko linijų gniūžčių išilgai ašies x lygus $\lambda_x/2$.

Svarbu, kad 4.6 pav. galima nubraižyti be jokių formulų.

4.5. Atlikite kaip 4.4, kai visi magnetinių laukų stiprio vektoriai yra lygiagretūs y ašiai – $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_y$.

Sprendimas: Pateiktas 4.7 pav., metodika analogiška 4.4. Kai $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_y$, 0 taške turi sueiti ištisinis ir ištisinis arba brūkšninis ir brūkšninis frontai abiem EM bangoms. Tada patenkinama sąlyga $\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^a$. Po to braižomos suminio magnetinio lauko linijos. Toliau braižomos suminio elektrinio lauko linijos. Tam 4.7 pav. išskiriamas rombas su magnetinio lauko linijų gniūžtėmis vertikaliajoje įstrižainėje, apribotas dviem krintančiosios ir atspindėtosios bangų frontais. Jų susikirtimo 1, 2, 3, 4 taškuose pagal dešiniojo sraigto taisyklę randami vienodi krintančiosios bei atspindėtosios bangų elektrinio lauko stiprio vektoriai. Po to jie sumuojami geometriškai. Įvertinus, kad suminio lauko stiprio vektoriai $\mathbf{E}^{\Sigma}$ turi sutapti su linijos liestinėmis, braižoma uždara suminio elektrinio lauko linija – žiedas. Kiti rombai apibrėžiami analogiškais žiedais ir nurodomos jų kryptys, įvertinant, kad gretimų linijų kryptys turi būti vienodos. Prie idealiojo laidininko plokštumos braižomi elektrinio lauko linijų pusžiedžiai, kurie pagal ribines sąlygas yra statmeni laidininko paviršiui. Jame indukuojami

Slinkties srovių linijos braižomos kaip elektrinio lauko linijos, tik kita spalva arba brūkšniais-taškais ir paslinktos atstumu $\lambda_z/4$ ašies z kryptimi. Slinkties srovių pusžiedžiai pereina į laidžio srovės idealiojo laidininko paviršiuje ir kartu sudaro srovių žiedus.

4.7 pav. suminio magnetinio lauko linijos yra lygiagretės Oy ašiai iki pat laidininko ir nueina į begalybę. Todėl nėra magnetinio lauko linijų žiedų. Elektrinio lauko linijų žiedai sudaryti iš komponentių E_x ir E_z . Jos yra magnetinio lauko linijoms statmenoje plokštumoje. Komponentių E_x sutankėjimai sutampa su magnetinio lauko linijų gniūžtėmis. Jų vietose suminės bangos Pointingo vektorių kryptys sutampa su ašies z kryptimi. Bėgančiosios išilgai idealiojo laidininko paviršiaus nevienalytės EM bangos ilgis yra λ_z . Mažiausias išilgai ašies z atstumas tarp slinkties srovių žiedų su priešingomis kryptimis yra $\lambda_z/2$.

Suminio elektrinio lauko tangentinės komponentės E_z sutankėja ten, kur nėra magnetinio lauko. Išilgai x ašies yra pjūviai, kuriuose šių laukų stipriai yra lygūs nuliui, ir pjūviai, kuriuose laukų stipriai visada maksimalūs, t. y. laukų stiprių amplitudės priklauso nuo x koordinatės. Idealiojo laidininko plokštumai statmena kryptimi Pointingo vektoriai negaunami. Tai būdingieji stovinčiosios bangos (SB), kurios ilgis λ_x , požymiai. Atstumas tarp dviejų artimiausių magnetinio lauko linijų gniūžčių išilgai ašies x lygus $\lambda_x/2$.

4.7 pav. irgi galima nubraižyti be jokių formulių.

Daugiau analogiškų užduočių pateikta 1.1 priede.

5. ELEKTROMAGNETINIAI LAUKAI METALINIUOSE BANGOLAIDŽIUOSE IR REZONATORIUOSE

Teorinė dalis

Bangolaidžiais siaurąja prasme vadinami kryptingai perduoti EM energijai skirti dielektriku užpildyti variniai arba žalvariniai, kartais viduje pasidabruoti, vamzdžiai. Dažniai, virš kurių sklinda EM laukai bangolaidžiuose, vadinami kriziniais dažniais ω_{kr} . Krizinius dažnius atitinka bangų ilgiai, vadinami kriziniais ilgiais [12]:

$$\lambda_{kr} = 2\pi v_f / \omega_{kr}, \quad (5.1)$$

čia $v_f = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ – plokščiųjų bangų faziniai greičiai bangolaidžius užpildančiuose dielektrikuose, laikant juos neribotais.

Bangų ilgiai bangolaidžiuose λ_b nustatomi pagal išraišką:

$$\lambda_b = \lambda / \sqrt{1 - (\omega_{kr}/\omega)^2} = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{kr})^2} \geq \lambda(\lambda_0), \quad (5.2)$$

čia $\lambda(\lambda_0)$ – bangų ilgiai bangolaidžių dielektrikuose (vakuume).

Idealiuosiuose metaliniuose bangolaidžiuose silpimo koeficientai $\alpha_b = 0$, o bangų fazės koeficientai:

$$\beta_b = \beta \sqrt{1 - (\omega_{kr}/\omega)^2} = \beta \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{kr})^2} \leq \beta(\beta_0), \quad (5.3)$$

čia $\beta(\beta_0)$ – bangų fazės koeficientai dielektrikuose (vakuume).

Bangų faziniai greičiai metaliniuose bangolaidžiuose:

$$v_{fb} = \omega/\beta_b = v_f / \sqrt{1 - (\omega_{kr}/\omega)^2} = v_f / \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{kr})^2} \geq v_f(c_0), \quad (5.4)$$

čia $v_f(c_0)$ – bangų faziniai greičiai dielektrikuose (vakuume).

Bangolaidžiais sklindančių bangų grupiniai greičiai:

$$v_{grb} = d\omega/d\beta_b = v_f \sqrt{1 - (\omega_{kr}/\omega)^2} = v_f \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{kr})^2} \leq v_f(c_0). \quad (5.5)$$

Iš (5.4), (5.5) formulių matyti, kad bangolaidžiuose sklindančių bangų faziniai ir grupiniai greičiai priklauso nuo dažnio. Šių greičių sandauga $v_{fb}v_{grb} = v_f^2 (c_0^2) = \text{const}$ yra lygi plokščiųjų EM bangų fazinių greičių kvadratu neribotuose dielektrikuose, pvz., vakuume, nors dažniausiai ore. Tai yra konstanta, tad vieniems iš greičių v_{fb}, v_{grb} didėjant, kiti mažėja, kintant dažniui. Todėl bangolaidžiai juose sklindančioms bangoms yra dispersinės sistemos.

Metaliniuose bangolaidžiuose gali sklisti įvairių tipų bangos. Jos skiriasi EM laukais ir sklidimo greičiais.

T (TEM) tipo – skersinės EM bangos. Jų laukuose nėra išilginių elektrinio ir magnetinio laukų komponentių ($E_z = 0, H_z = 0$). Yra tik skersinės komponentės ($E_s \neq 0, H_s \neq 0$). T tipo bangos gali sklisti neribotuose bangolaidžių dielektrikuose, bet nesklinda metaliniuose bangolaidžiuose.

E_{mn} tipų – elektrinių bangų EM laukuose yra išilginės ir skersinės elektrinio lauko komponentės ($E_z \neq 0, E_s \neq 0$). Išilginės komponentės E_z yra lygiagretės bangolaidžių šoninėms sienelėms. Pagal ribines sąlygas elektrinio lauko stipris prie metalinių sienelių paviršių turi būti lygus nuliui ($E_z = E_\tau = 0$). Šių bangų magnetinių laukų linijos yra tik skersinėje plokštumoje ($H_z = 0, H_s \neq 0$). Todėl dažnai jos vadinamos skersinėmis magnetinėmis bangomis ir nurodomos TM_{mn} žymenimis. E_{mn} ir TM_{mn} žymenys yra tapatūs ($E_{mn} \equiv TM_{mn}$).

H_{mn} tipų – magnetinių bangų EM laukuose yra išilginės ir skersinės magnetinio lauko komponentės ($H_z \neq 0, H_s \neq 0$). Išilginės komponentės H_z yra lygiagretės bangolaidžių šoninėms sienelėms. Pagal ribines sąlygas magnetinio lauko stipris prie metalinių sienelių paviršių turi būti maksimalus ir lygus laidžio paviršinės srovės tankio normalinės komponentės amplitudės maksimumui ($H_z = H_\tau = J_{lSNm \max}$). Tai nekonkreto, todėl rašoma ribinė sąlyga, kad $\partial H_z / \partial n = 0$ – išilginių magnetinio lauko stiprio komponentių dalinės išvestinės pagal statmenį šoninėms stačiakampių bangolaidžių sienelėms turi būti lygios nuliui. Šių bangų elektrinių laukų linijos yra tik skersinėje plokštumoje ($E_z = 0, E_s \neq 0$). Todėl dažnai jos vadinamos skersinėmis elektrinėmis bangomis ir nurodomos TE_{mn} žymenimis ($H_{mn} \equiv TE_{mn}$).

5.1. Laukai stačiakampiuose bangolaidžiuose

Metaliniuose stačiakampiuose bangolaidžiuose E_{mn} tipų bangų momentinės elektrinio lauko išilginių komponentių reikšmės yra [12]:

$$E_z(x, y, z, t) = E_{z0} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \cos(\omega t - \beta_b z), \quad (5.6)$$

čia E_{z0} – maksimali amplitudė; $m = 1, 2, 3, \dots$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Bangolaidžių skerspjūviuose išilgai ašių x ir y susidaro elektrinio lauko išilginių komponentių, pasiskirsčiusių pagal sin funkcijas $\sin(m\pi x/a)$, $\sin(n\pi y/b)$, stovinčiosios bangos (SB). Pagal ribines sąlygas prie metalinių bangolaidžių sienelių, kai $x = 0$, $x = a$ ir $y = 0$, $y = b$, gaunami SB mazgai. Sveikieji skaičiai m ir n nurodo SB pusbangių skaičių išilgai plačiųjų ($m \leftrightarrow a$) ir siaurųjų ($n \uparrow b$) bangolaidžių sienelių. Bangų tipai nurodomi žymeniu E_{mn} , kurio indeksai m , n gali įgyti visas sveikąsias reikšmes, išskyrus nulį. E_{mn} tipų bangos su m arba (ir) $n = 0$ metaliniuose stačiakampiuose bangolaidžiuose nesklinda, nes jų $E_z = 0$.

Stačiakampiuose metaliniuose bangolaidžiuose H_{mn} tipų bangų momentinės magnetinio lauko išilginių komponentių reikšmės yra:

$$H_z(x, y, z, t) = H_{z0} \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) \cos(\omega t - \beta_b z), \quad (5.7)$$

čia H_{z0} – maksimali amplitudė; $m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Bangolaidžių skerspjūviuose išilgai ašių x ir y susidaro išilginių magnetinio lauko komponentių, pasiskirsčiusių pagal cos funkcijas $\cos(m\pi x/a)$, $\cos(n\pi y/b)$, stovinčiosios bangos. Jos skiriasi nuo E_{mn} tipų bangų tuo, kad pagal ribines sąlygas prie metalinių bangolaidžių sienelių, kai $x = 0$, $x = a$ ir $y = 0$, $y = b$, gaunami SB pūpsniai. Sveikieji skaičiai m ir n nurodo SB pusbangių skaičių išilgai plačiųjų ($m \leftrightarrow a$) ir siaurųjų ($n \uparrow b$) bangolaidžių sienelių. Stačiakampiuose metaliniuose bangolaidžiuose gali sklisti H_{mn} tipų bangos tik su vienu nuliniu indeksu, pvz.: pagrindinio tipo banga H_{10} , banga H_{01} ir kt.

Idealiuosiuose reguliariuose, be galo ilguose, metaliniuose stačiakampiuose bangolaidžiuose išilgai ašies z sklinda tik bėgančiosios bangos. Jų kriziniai ilgiai skaičiuojami pagal bendrą formulę:

$$\lambda_{kr\,mn} = 2 / \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}. \quad (5.8)$$

Šioje formulėje nėra ε ir μ , todėl $\lambda_{kr\,mn}$ nepriklauso nuo bangolaidžius užpildančių dielektrinių ir magnetinių medžiagų, lyg tai būtų vakuumas arba oras. Be to, $\lambda_{kr\,mn}$ yra vienodi E_{mn} bei H_{mn} tipų bangoms su vienodomis indeksų m ir n poromis.

Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

5.1. Išveskite formules ir apskaičiuokite bangų krizinius ilgius aštuoniems žemiausiems bangų tipams oru užpildytame metaliniame stačiakampiam bangolaidyje, kurio skerspjūvio vidiniai matmenys yra 72×34 mm. Sudarykite ir paaiškinkite sprendimo rezultatų lentelę bei bangų tipų diagramą.

Atsakymas: Išvedama pagal formulę (5.8), apskaičiuojama ir pateikiama 5.1 lentelėje. Sudaroma bangų tipų diagrama kaip [12].

5.1 lentelė. Metalinių stačiakampių bangolaidžių bangų kriziniai ilgiai

Banga \ Ilgis	H_{30}	E_{21}, H_{21}	E_{11}, H_{11}	H_{01}	H_{20}	H_{10} pagr.
$\lambda_{kr\,mn}$ formulė	$\frac{2a}{3}$	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}$	$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	$2b$	a	$2a$
$\lambda_{kr\,mn}$, mm	48	49,44	61,49	68	72	144

Išvados: 1) metaliniame stačiakampiame bangolaidyje E_{mn} tipų bangos su nuliniais indeksais nesklinda. Žemiausia E_{mn} tipo banga stačiakampiame bangolaidyje yra E_{11} .

2) vyrauja H_{mn} tipų bangos su vienu nuliniu indeksu. Kai $m = 0$, $\lambda_{kr mn}$ formulėse yra tik siaurosios bangolaidžio sienelės ilgis b . Kai $n = 0$, $\lambda_{kr mn}$ formulėse yra tik plačiosios sienelės ilgis a .

3) $\lambda_{kr mn}$ yra vienodi E_{mn} ir H_{mn} tipų bangoms su vienodomis indeksų $m \neq 0$ ir $n \neq 0$ poromis – E_{11} , H_{11} ; E_{21} , H_{21} . Bangų krizinių ilgių $\lambda_{kr mn}$ formulėse yra abiejų bangolaidžio sienelių ilgiai a ir b .

4) bangų tipų diagramoje išskiriamos 3 sritys pagal T bangų ilgius neribotame ore (indeksas o). 1 srityje yra $\lambda_o \geq 2a$ ir metaliniame stačiakampiame bangolaidyje bangos nesklinda. 2 srityje yra $a \leq \lambda_o < 2a$ ir, kai $a > 2b$, bangolaidyje sklinda tik H_{10} banga. Jos krizinis ilgis $\lambda_{kr10} = 2a$ yra didžiausias. Todėl ji vadinama pagrindine banga. 3 srityje yra $\lambda_o < a$ ir bangolaidyje kartu su H_{10} banga gali sklisti be galo daug E_{mn} ir H_{mn} aukštesniųjų tipų bangų.

5.2. Patikrinkite, ar metaliniame stačiakampiame bangolaidyje, kurio skerspjūvio vidiniai matmenys yra 23×10 mm, sklinda 10 GHz dažnio pagrindinė banga. Jeigu sklinda, apskaičiuokite jos v_p , λ , λ_{kr} , f_{kr} neribotame ore ir bangolaidyje, kuris užpildytas oru. Pateikite sprendimo rezultatus lentelėje ir suformuluokite išvadas apie bangolaidžio įtaką bangos parametrus.

Sprendimas: T bangos fazinis greitis neribotame ore (o) yra:

$$v_{fo} \approx c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Apskaičiuojamas T bangos ilgis neribotame ore:

$$\lambda_o \text{ (m)} \approx 300 / f \text{ (MHz)} = 300 / 10^4 = 0,03 \text{ m.}$$

Stačiakampiame bangolaidyje pagrindinė yra H_{10} banga.

Nustatomas H_{10} bangos krizinis ilgis:

$$\lambda_{kr10} = 2a = 2 \cdot 0,023 = 0,046 \text{ m} > \lambda_o = 0,03 \text{ m.}$$

H_{10} bangos krizinis dažnis yra:

$$f_{kr10} = v_{fo} / \lambda_{kr10} = 3 \cdot 10^8 / 0,046 = 6,52 \cdot 10^9 \text{ Hz} < f = 10 \text{ GHz}.$$

Randamas H_{10} bangos fazinis greitis bangolaidyje su oru (bo):

$$v_{fbo} = \frac{v_{fo}}{\sqrt{1 - (\lambda_o / \lambda_{kr10})^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - (0,03/0,046)^2}} \approx 3,96 \cdot 10^8 \text{ m/s} > \\ > v_{fo} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

H_{10} bangos ilgis bangolaidyje, užpildytame oru, yra:

$$\lambda_{bo} = \frac{\lambda_o}{\sqrt{1 - (\lambda_o / \lambda_{kr10})^2}} = \frac{0,03}{\sqrt{1 - (0,03/0,046)^2}} \approx 0,0396 \text{ m} > \\ > \lambda_o \approx 0,03 \text{ m} (< \lambda_{kr10} = 0,046 \text{ m}).$$

Užpildoma 5.2 lentelė.

5.2 lentelė. 5.2 užduoties sprendimo rezultatai

Terpė \ Rezultatai	v_f m/s	λ , m	λ_{kr} m	f_{kr} GHz
Oras	$3 \cdot 10^8$	0,03	???	???
Bangolaidis su oru	$3,96 \cdot 10^8$	0,0396	0,046	6,52

Išvados: 1) metalinis stačiakampis bangolaidis keičia EM bangos tipą – dėl neribotame ore sklindančios plokščiosios vienalytės T bangos kritimo kampu bei atspindžių nuo sienelių bangolaidyje susidaro interferacinė plokščioji ir nevienalytė pagrindinė H_{10} banga.

2) pagrindinė H_{10} banga sklinda, nes jos $f > f_{kr10}$, o $\lambda_{kr10} > \lambda_o$.

3) H_{10} bangos kriziniai dažnis ir ilgis yra neribotame ore sklindančios T bangos dažnis ir ilgis, nuo kurių pradeda sklisti H_{10} banga bangolaidyje. Kriziniai dažnis ir ilgis, nuo kurių pradeda sklisti T banga neribotame ore, tiksliai nenustatyti.

4) bangolaidis, nekeisdamas dažnio, pakeičia tipą, pagreitina ir pailgina bangą, palyginti su greičiu $v_{fo} \approx c_0$ ir ilgiu λ_o neribotame ore, tačiau šiuo atveju λ_{bo} dar neviršija λ_{kr10} .

5.3. Patikrinkite, ar metaliniame stačiakampiam bangolaidyje, kurio skerspjūvio vidiniai matmenys yra 23×10 mm, sklinda 30 GHz dažnio žemiausia E_{mn} tipo banga. Apskaičiuokite šios bangos λ_{kr} , f_{kr} , λ_b , v_{fb} bangolaidžiui, kuris užpildytas oru arba polietilenu su $\epsilon_{rp} = 2,25$. Pateikite sprendimo rezultatus lentelėje ir išvadas apie bangolaidžio ir jo užpildo įtaką bangos parametrams.

Sprendimas: T bangos fazinis greitis neribotame ore (o) yra:

$$v_{fo} \approx c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Apskaičiuojamas T bangos ilgis neribotame ore:

$$\lambda_o(\text{m}) \approx 300 / f(\text{MHz}) = 300 / 3 \cdot 10^4 = 0,01 \text{ m.}$$

Žemiausia E_{mn} tipo banga stačiakampiam bangolaidyje yra E_{11} .

Nustatomas E_{11} bangos krizinis ilgis:

$$\lambda_{kr11} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2 \cdot 0,023 \cdot 0,01}{\sqrt{(0,023)^2 + (0,01)^2}} \approx 0,018 \text{ m} > \lambda_o = 0,01 \text{ m.}$$

E_{11} bangos krizinis dažnis stačiakampiam bangolaidyje:

$$f_{kr11} = v_{fo} / \lambda_{kr11} = 3 \cdot 10^8 / 0,018 = 16,7 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 16,7 \text{ GHz} <$$

$$< f = 30 \text{ GHz.}$$

Randamas E_{11} bangos fazinis greitis bangolaidyje su oru (bo):

$$v_{fbo} = \frac{v_{fo}}{\sqrt{1 - (\lambda_o / \lambda_{kr11})^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - (0,01 / 0,018)^2}} \approx 3,58 \cdot 10^8 \text{ m/s} > \\ > v_{fo} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

E_{11} bangos ilgis bangolaidyje, užpildytame oru, yra:

$$\lambda_{bo} = \frac{\lambda_o}{\sqrt{1 - (\lambda_o / \lambda_{kr11})^2}} = \frac{0,01}{\sqrt{1 - (0,01 / 0,018)^2}} \approx 0,012 \text{ m} > \\ > \lambda_o \approx 0,01 \text{ m} (< \lambda_{kr11} = 0,018 \text{ m}).$$

Nustatomas T bangos fazinis greitis neribotame polietilene (p):

$$v_{fp} = \frac{v_{fo}}{\sqrt{\epsilon_{rp}\mu_{rp}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,25 \cdot 1}} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

T bangos ilgis neribotame polietilene yra:

$$\lambda_p = \frac{v_{fp}}{f} = \frac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{10}} \approx 0,007 \text{ m.}$$

E_{11} bangos fazinis greitis bangolaidyje su polietilenu (bp):

$$v_{fbp} = \frac{v_{fp}}{\sqrt{1 - (\lambda_p / \lambda_{kr11})^2}} = \frac{2 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - (0,007/0,018)^2}} \approx 2,17 \cdot 10^8 \text{ m/s} > \\ > v_{fp} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

E_{11} bangos ilgis bangolaidyje, užpildytame polietilenu, yra:

$$\lambda_{bp} = \frac{\lambda_p}{\sqrt{1 - (\lambda_p / \lambda_{kr11})^2}} = \frac{0,007}{\sqrt{1 - (0,007/0,018)^2}} \approx 0,008 \text{ m} > \\ > \lambda_p \approx 0,007 \text{ m} (< \lambda_{kr11} = 0,018 \text{ m}).$$

Užpildoma 5.3 lentelė.

5.3 lentelė. 5.3 užduoties sprendimo rezultatai

Terpė \ Rezultatai	f_{kr11} , GHz	λ_{kr11} , m	λ , m	λ_{bp} , m	v_{fi} , m/s	v_{fbp} , m/s
Oras	16,7	0,018	0,01	0,012	$3 \cdot 10^8$	$3,58 \cdot 10^8$
Polietilenas	16,7	0,018	0,007	0,008	$2 \cdot 10^8$	$2,17 \cdot 10^8$

Išvados: 1) žemiausia E_{mn} tipo banga metaliniame stačiakampiame bangolaidyje yra E_{11} ir ji bangolaidyje sklinda, nes jos $f > f_{kr11}$, o $\lambda_o < \lambda_{kr11}$.

2) oru užpildytas bangolaidis, nekeisdamas dažnio, pailgina ir pagreitina bangą, palyginus su jos ilgiu λ_o ir greičiu $v_{fo} \approx c_0$ neribotame ore, tačiau šiuo atveju λ_{bo} dar neviršija λ_{kr11} .

3) polietilenu užpildytas bangolaidis, nekeisdamas dažnio, pailgina ir pagreitina bangą, palyginus su jos ilgiu λ_p ir greičiu v_{fp} neribotame polietilene, tačiau sutrumpina ir sulėtina bangą, palyginti su jos ilgiu λ_o ir

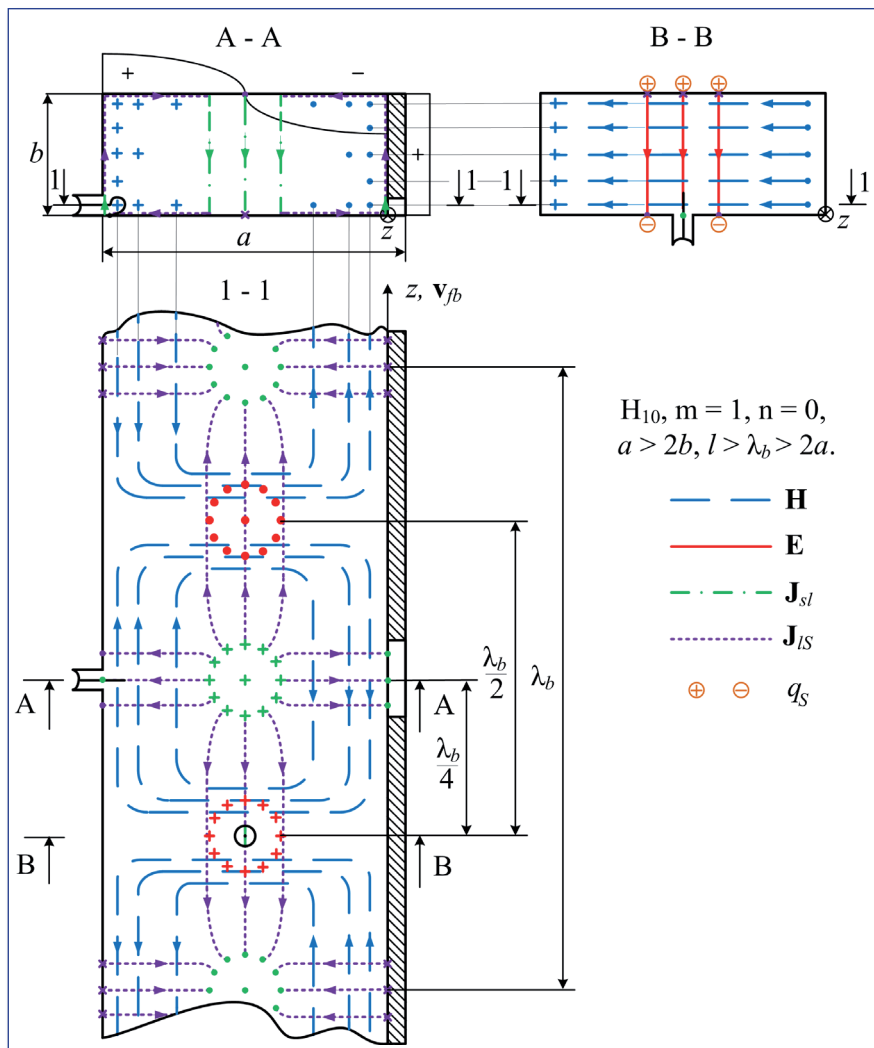
greičiu $v_{fo} \approx c_0$ neribotame ore bei jos ilgiu λ_{bo} ir greičiu v_{fbo} oru užpildytame bangolaidyje.

4) polietilenas, nekeisdamas bangos dažnio, krizinių dažnio ir ilgio, sumažina bangos ilgį ir greitį tiek palyginus su ilgiu bei greičiu neribotame ore, tiek oru užpildytame metaliniame stačiakampiame bangolaidyje.

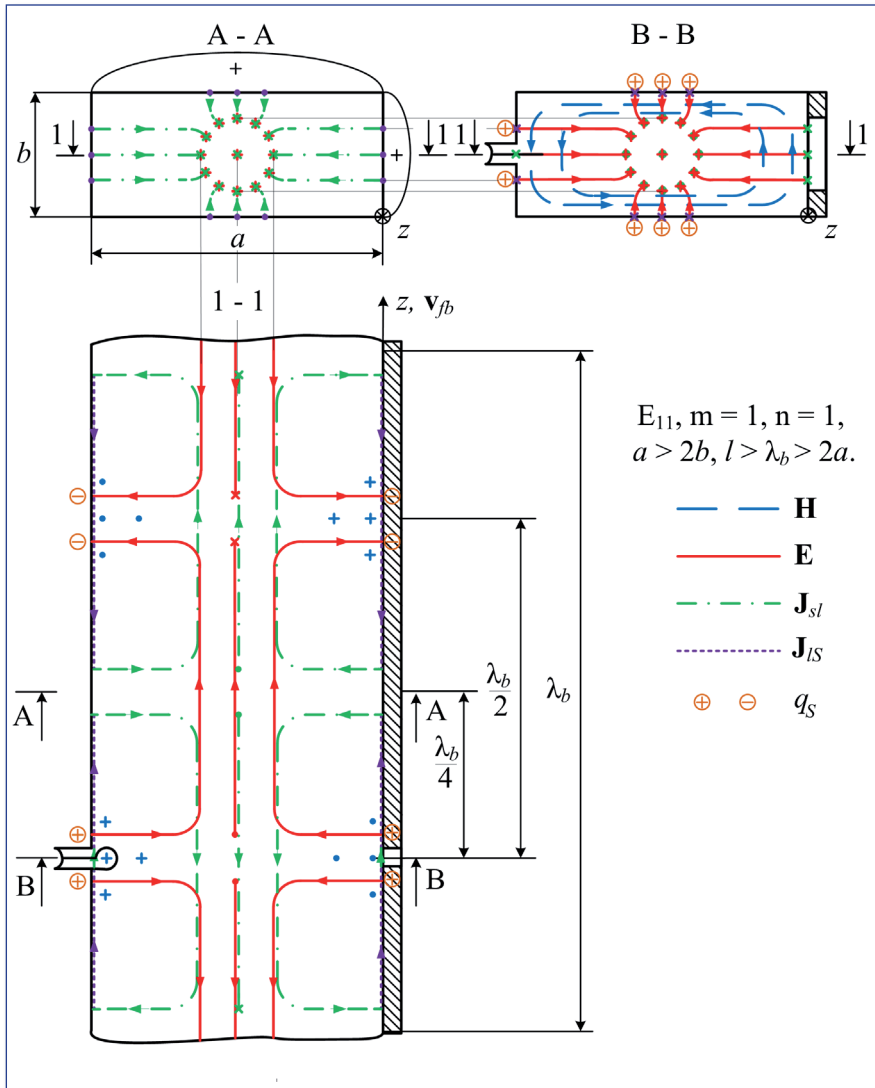
5.4. Nubraižykite H_{10} (E_{11}) bangos, žadinamos strypeliu, kilpa arba plyšiu metaliniame stačiakampiame bangolaidyje ($a > 2b$, $l > \lambda_b > 2a$), EM lauko vektorių $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}_s$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}_s$ linijas ir paviršinius krūvius q_s . Aptarkite žadinimo būdo parinkimą.

Sprendimas [12] pateiktas 5.1 (5.2) pav. Bangos tipo žymuo H_{10} (E_{11}) reiškia, kad banga turi išilgines magnetinio (elektrinio) lauko komponentes. H_{10} (E_{11}) dešinėje esantis pirmasis indeksas $m = 1$ (1) nurodo išilginių komponentių SB pusbangių skaičių išilgai plačiosios, o antrasis indeksas $n = 0$ (1) – išilgai siaurosios bangolaidžio sienelės. H_{10} bangos išilginės magnetinio lauko komponentės pasiskirsto prie sienelių pagal cos funkcijas. E_{11} bangos išilginės elektrinio lauko komponentės pasiskirsto stačiakampio bangolaidžio viduje pagal sin funkcijas. Šios funkcijos atspindi ribines sąlygas, kurias turi patenkinti magnetinio (elektrinio) lauko išilginės komponentės 5.1 (5.2) pav. kairiajame viršutiniame skerspjūvyje. Jis visada braižomas su horizontaliomis plačiosiomis stačiakampio bangolaidžio sienelėmis, neatsižvelgiant į paveikslą orientaciją. Pradžiai siūloma nusipiešti šį skerspjūvį juodraštyje.

H_{mn} tipų bangos gali turėti bet kurį vieną nulinių indeksą (H_{10}). Jis reiškia tolygų ($\cos 0 = 1 = \text{const}$) išilginių magnetinio lauko komponentių pasiskirstymą prie atitinkamos (siaurosios) sienelės (5.1 pav.). H_{00} banga neegzistuoja, nes jos išilginės magnetinio lauko komponentės turėtų pasiskirstyti tolygiai ir nesigautų stovinčioji banga bangolaidžio skerspjūvyje. E_{mn} tipų bangos negali turėti nulinių indeksų. E_{01} , E_{10} ir kt. bangos su nulinais indeksais neegzistuoja, nes $\sin 0 = 0$. Nulinę pasiskirstymo funkciją dauginant iš kitos $\sin$ funkcijos, gaunamas nulis. Šios bangos negalėtų turėti E_z komponentių ir būti E_{mn} tipų bangomis. Žemiausia E_{mn} tipo yra E_{11} banga (5.2 pav.).



5.1 pav. H_{10} bangos EM laukas metaliniame stačiakampiniame bangolaidyje, žadinamame strypeliu, kilda arba plyšiu



5.2 pav. E_{11} bangos EM laukai metaliniame stačiakampiam bangolaidyje, žadinamame strypeliu, kilpa arba plyšiu

Nubraižius ant sienelių išilginių komponentių pasiskirstymo skerspjūvyje funkcijas $\cos$ ($\sin$), bangolaidžio išorėje esantys funkcijų ketvirčiai pažymimi kaip teigiamieji (+), o likę viduje – kaip neigiamieji (–). Po to pasiskirstymo funkcijos dauginamos tarpusavyje: pliusą (+) dauginant iš pliuso (+) arba minusą (–) dauginant iš minuso (–), gaunamas pliusas (+) ir skerspjūvyje braižomi nuo mūsų gilyn nueinančių išilginių komponentių kryžiuokai (+, $\times$). Pliusą (+) dauginant iš minuso (–) arba atvirkščiai, gaunamas minusas (–) ir skerspjūvyje braižomi į mus ateinančių komponentių taškai ($\circ$). Jų tankis skerspjūvyje turi atitikti pasiskirstymo funkcijų aukštį – didesnis aukštesnį.

5.1 pav. išilginių magnetinio lauko komponentių tankis turi būti didžiausias prie vertikalių siaurųjų bangolaidžio sienelių ir mažėti išilgai horizontalių plačiųjų sienelių iki centro. Čia $\cos$ funkcija pereina 0 ir išilginių komponentių neturi būti. Bet jų tankis turi likti pastovus išilgai vertikalių bangolaidžio sienelių ($\cos 0 = 1 = \text{const}$).

Tam siūloma prie jų braižyti nelyginį kryžiuokų ir taškų skaičių (5, 7) bei retinti juos kas antrą, artėjant link bangolaidžio vidurio. Tada pagal ribines sąlygas išilginės magnetinio lauko komponentės visada koncentruosis prie sienelių ir ypač stačiakampio bangolaidžio kampuose (5.1 pav.).

5.2 pav. išilginių elektrinio lauko komponentių tankis pagal $\sin$ funkciją turi būti didžiausias visų bangolaidžio sienelių viduryje ir mažėti išilgai jų iki kampų. Čia funkcija pereina 0 ir išilginių komponentių neturi būti. Taigi pagal ribines sąlygas išilginės elektrinio lauko komponentės visada koncentruosis bangolaidžio viduje. Čia reikia jų skaičių parinkti taip, kad, išilginėms komponentėms pereinant į skersines, visomis kryptimis nueitų po 3 skersines komponentes – $4 \times 3 = 12$.

Ypač svarbu teisingai nubraižyti išilgines komponentes H_z (E_z) bangolaidžių kairiajame viršutiniame skerspjūvyje. Pagal jas bus braižomos išilginės ir skersinės komponentės kituose pjūviuose. Bangolaidžiams reikia mažiausiai trijų pjūvių: dviejų skersinių – A-A, B-B, ir vieno išilginio – 1-1. Pastarųjų padėtys ir turinys labai priklauso nuo skerspjūvio A-A.

Jame reikia parinkti sudėtingiausią išilginį pjūvį 1-1 ir žiūrėjimo krypties rodyklės taip, kad pjūvyje 1-1 matytųsi kuo daugiau EM lauko linijų.

5.1 pav. skerspjūvyje A-A tai yra horizontalus pjūvis 1-1 per apatinius išilginių magnetinio lauko komponentių kryžiukus ir taškus, kurių yra daugiausia. Nueinančios (+) ir ateinančios (-) išilginės komponentės turi sudaryti su skersinėmis komponentėmis horizontalius magnetinio lauko žiedus. Juos būtina parodyti išilginiame pjūvyje 1-1, kuris išdėstomas po skerspjūviu A-A. Klaida būtų jame daryti vertikalų išilginį pjūvį dešinėje. Tik nueinančios arba tik ateinančios išilginės komponentės negali sudaryti vertikalų magnetinio lauko žiedų.

5.2 pav. yra tik nueinančios (+) išilginės elektrinio lauko komponentės skerspjūvio A-A viduryje. Jos turi pereiti į skersines komponentes ir kartu sudaryti elektrinio lauko pusžiedžius, statmenus bangolaidžio sienelėms prie jų. Pusžiedžiams parodyti galima braižyti horizontalų arba vertikalų išilginį pjūvį 1-1. Pasirinktas horizontalus pjūvis 1-1 skerspjūvio A-A viduryje ir apačioje.

Tai lemia skerspjūvio B-B padėtį (5.1, 5.2 pav.) dešinėje viršuje.

Apytikriai nustačius trijų bangolaidžio pjūvių padėtis juodraštyje, reikia juos išdėstyti ir gana tiksliai nubraižyti plonomis linijomis būsimame paveiksle. Tam būtina atsižvelgti į užduoties sąlygas $a > 2b$, $l > \lambda_b > 2a$. Pirmoji sąlyga taikoma bangolaidžių skerspjūviams A-A, B-B, o antroji – išilginiam pjūviui 1-1. Jis turi būti kuo ilgesnis. Todėl reikia paveikslo lapą orientuoti vertikaliai. Teoriškai bangolaidžiai laikomi be galo ilgais, kad juose būtų bėgančiųjų bangų režimas. Užtat išilginio pjūvio galai apibrėžiami vingiuota linija. Šioje atkarpoje turi tilpti daugiau kaip vieno bangos ilgio λ_b EM laukas. Bangą sudaro 4 jos ketvirčiai, todėl išilginio pjūvio 1-1 atkarpą reikia padalyti į 4 lygias dalis, nesiekiant vingiuotų galų (5.1, 5.2 pav.). EM laukai būna simetriški, todėl verta visuose bangolaidžių pjūviuose nubraižyti plonas pagalbines vertikalias ir horizontalias simetrijos ašis. Taip paruošti 3 pjūviai pažymimi A-A, B-B, 1-1. Pjūvyje A-A tvarkingai nubraižomos magnetinio (elektrinio) lauko išilginės komponentės,

žemyn nukreiptomis žiūrėjimo krypties rodyklėmis nurodomas išilginis pjūvis 1-1 (5.1, 5.2 pav.) pagal anksčiau nurodytą metodiką.

Po to iš skerspjuvio A-A pjūvio 1-1 nubraižomos vertikalios pagalbinės linijos nuo kiekvieno kryžiuko ir taško žemyn per visą išilginį pjūvį 1-1. Tai būsimosios išilginės magnetinio (elektrinio) lauko komponentės (5.1, 5.2 pav.). Jos turės pereiti į skersines komponentes visų bangos ilgio ketvirčių galuose. Todėl juose nubraižomos horizontalios pagalbinės linijos, statmenos vertikaliosioms. Iš jų visų suformuojami bėgančiosios bangos (*BB*) magnetinio lauko žiedai (elektrinio lauko pusžiedžiai) pusbangyje arba jų dalys bangos ilgio ketvirtyje. Magnetinio lauko linijos turi būti lygiagretės prie bangolaidžio sienelių. Todėl skersinės šio lauko komponentės, nepasiekusios sienelių, išlinksta ir tolygiai pereina į lygiagrečias sienelėms išilgines komponentes (5.1 pav.). O elektrinio lauko linijos turi būti statmenos prie bangolaidžio sienelių. Todėl skersinės lauko komponentės įsiremia statmenai į sienelės, o, nutolusios nuo jų, išlinksta ir tolygiai pereina į išilgines komponentes bangolaidžio viduje (5.2 pav.).

Toliau išilginio pjūvio 1-1 vidurio pjūvis pažymimas A-A su žiūrėjimo krypties aukštyn rodyklėmis. Žiedų ir pusžiedžių kryptys šiame pjūvyje nurodomos rodyklėmis taip, kad sutaptų su išilginių komponentių kryptimis viršutiniame kairiajame skerspjuvyje A-A, žiūrint iš apačios į viršų ir iš viršaus žemyn. Vieno ir lygiagrečių bei gretimų žiedų arba pusžiedžių rodyklių kryptys turi sutapti.

Vėliau braižomos slinkties srovės tankio $\mathbf{J}_{sl}$ linijos. Srovės yra magnetinio lauko šaltinis bangolaidyje. Todėl slinkties srovės linijos braižomos magnetinio lauko žiedų viduryje, statmenai jiems. Linijų kryptis nustatoma pagal dešiniojo kumščio taisyklę išilginiame pjūvyje 1-1 ir skerspjuvyje A-A (5.1 pav.). Slinkties srovė teka dielektrike nuo viršutinės bangolaidžio sienelės link apatinės, statmenai joms. Ji turi tik skersines komponentes ir privalo pereiti į laidžio paviršinę srovę laidininke, kad susidarytų uždaras srovių žiedas. Todėl slinkties srovės linijų turi būti tiek, kad visomis galimomis kryptimis nueitų bent po 3 laidžio paviršinės srovės tankio $\mathbf{J}_{ls}$ komponentes – $4 \times 3 = 12$. Laidžio srovė teka horizontalių ir

vertikalių bangolaidžio sienelių paviršiuose bei vaizduojama nurodytomis linijomis, kryžiukais ir taškais pjūviuose 1-1 ir A-A. Laidžio srovės linijos yra statmenos magnetinio lauko linijoms, jų kryptys susietos dešiniojo kumščio taisykle (5.1 pav.).

Slinkties srovės tankio $\mathbf{J}_{sl}$ ir elektrinio lauko stiprio $\mathbf{E}$ linijos yra vienodos tose pat terpėse. Taigi nubraižius slinkties srovės linijas, galima nubraižyti analogiškas elektrinio lauko linijas (5.1 pav.) arba atvirkščiai (5.2 pav.), tik kitos spalvos ir pobūdžio. Tačiau bėgančiųjų bangų režime $\mathbf{J}_{sl}$ linijos pralenkia $\mathbf{E}$ linijas atstumu $\lambda_b/4$ bangų sklidimo kryptimi. Ją reikia nurodyti bangolaidžių pjūviuose, įvedant koordinačių ašį z ir bangų fazinio greičio vektorių $\mathbf{v}_{fb}$, nukreiptus pasirinkta bangų sklidimo kryptimi. Be to, pažymėti atstumus $\lambda_b/4$, $\lambda_b/2$, λ_b . Po to jau reikia braižyti minėtas $\mathbf{E}$ arba $\mathbf{J}_{sl}$ ir $\mathbf{J}_{IS}$ linijas pjūviuose 1-1 ir A-A (5.1, 5.2 pav.).

$\mathbf{E}$ linijos, parodytos kryžiukais ir taškais išilginiame pjūvyje 1-1 (5.1 pav.), turi, kaip ir $\mathbf{J}_{sl}$ linijos, po 12 skersinių komponentių. Jos yra statmenos magnetinio lauko linijų skersinėms komponentėms tame pačiame bangolaidžio pjūvyje. Tai yra bendra visų EM laukų savybė. Elektrinių ir magnetinių laukų linijų kryptys susietos dešiniojo sraigto taisykle. Pagal ją, vektorių $\mathbf{E}$ sukant trumpiausiu keliu link vektoriaus $\mathbf{H}$, ta pačia kryptimi sukamo dešiniojo sraigto išilginis judesys turi sutapti su vektoriaus $\mathbf{H}$, t. y. ašies z ir vektoriaus $\mathbf{v}_{fb}$ kryptimis. Tai verta patikrinti, nes patvirtina brėžinio teisingumą.

$\mathbf{J}_{sl}$ linijos yra parodytos pusžiedžiais išilginiame pjūvyje 1-1 (5.2 pav.). Jos turi, kaip ir atstumu $\lambda_b/4$ atsiliekančios $\mathbf{E}$ linijos, išilginės komponentės bangolaidžio viduryje ir statmenas sienelėms skersinės komponentės. Šios pereina į laidžio paviršinės srovės tankio $\mathbf{J}_{IS}$ išilgines komponentes sienelėse. Taip susidaro šių srovių žiedai. Išilginės $\mathbf{J}_{sl}$ komponentės skerspjūvyje A-A yra parodytos kryžiukais, kurie sutampa su $\mathbf{E}$ kryžiukais. Į pirmuosius sueina $4 \times 3 = 12$ skersinių $\mathbf{J}_{sl}$ komponentių, kurios eina iš $\mathbf{J}_{IS}$ taškų statmenai bangolaidžio sienelėms. Išilginės $\mathbf{J}_{sl}$ ir $\mathbf{J}_{IS}$ komponentės žadina skersinius magnetinių laukų žiedus, lygiagrečius bangolaidžio sienelėms greta jų. Srovių ir žiedų kryptys susietos dešiniojo

kumščio taisykle. Žiedai parodyti kryžiukais ir taškais išilginiame pjūvyje 1-1 (5.2 pav.).

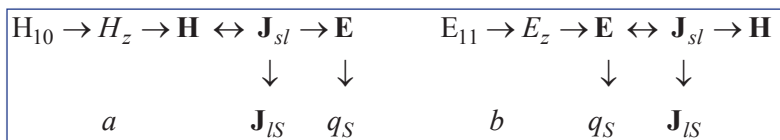
Tačiau skersinės magnetinio ir elektrinio laukų komponentės nematomos skerspjūvyje A-A (5.1, 5.2 pav.). Jos yra tik išilginiame pjūvyje 1-1. Todėl jame pažymėtas pjūvis B-B su žiūrėjimo krypties aukštyrų rodyklėmis. Čia esančios skersinės magnetinio ir elektrinio laukų komponentės pavaizduotos skerspjūvyje B-B viršuje dešinėje. Tam iš skerspjūvio A-A taškų (kryžiukų) nubraižytos horizontalios pagalbinės linijos į dešinę per skerspjūvį B-B. Tai būsimosios skersinės magnetinio lauko komponentės (5.1 pav.) ir išilginių slinkties srovės bei elektrinio lauko komponentių lygio linijos (5.2 pav.). Be to, skerspjūviuose B-B vaizduojamos analogiškos skerspjūvių A-A magnetinio lauko ir laidžio paviršinės srovės išilginės bei slinkties srovės ir elektrinio lauko skersinės komponentės. Todėl skerspjūviuose B-B ir A-A braižomos laukų linijos yra gana panašios, daugumos iš jų skiriasi tik spalvos ir pobūdis.

5.1 pav. skerspjūvyje B-B nubraižytos skersinės magnetinio lauko linijų komponentės yra susijusios pagal dešiniojo kumščio taisyklę su laidžio paviršinės srovės kryžiukais ir taškais. Jos pereina iš išilginių komponentių taškų į kryžiuokus, nesiekdamos bangolaidžio sienelių. Taip pavaizduoti lygiagretūs visoms sienelėms horizontalūs magnetiniai žiedai yra statmeni skersinėms elektrinėms komponentėms. Tai būdinga visiems EM laukams. Elektrinių ir magnetinių laukų linijų kryptys susietos dešiniojo sraigto taisykle. Elektrinio lauko linijos eina nuo teigiamųjų paviršinių krūvių ant viršutinės plačiosios bangolaidžio sienelės iki neigiamųjų krūvių ant apatinės sienelės, pagal ribines sąlygas statmenai joms. Skerspjūvio B-B apačioje nurodytas pjūvis su žiūrėjimo krypties rodyklėmis žemyn į išilginį pjūvį 1-1.

5.2 pav. skerspjūvyje B-B nubraižyti skersiniai magnetinio lauko žiedai yra susiję pagal dešiniojo kumščio taisyklę su laidžio paviršinės srovės tankio $\mathbf{J}_{IS}$ kryžiukais ir tūrinės slinkties srovės tankio $\mathbf{J}_{sl}$ taškais. Taip pavaizduoti lygiagretūs visoms sienelėms vertikalūs magnetinio lauko žiedai yra statmeni skersinėms elektrinėms komponentėms.

Tai būdinga visiems EM laukams. Elektrinių ir magnetinių laukų skersinių komponentėių kryptys susietos dešiniojo sraigto taisykle. Elektrinio lauko skersinės komponentės eina nuo teigiamųjų paviršinių krūvių ant bangolaidžio sienelių, pagal ribines sąlygas statmenai joms, iki išilginių komponentėių kryžiukų skerspjūvio B-B viduryje. Čia nurodytas pjūvis su žiūrėjimo krypties rodyklėmis žemyn į išilginių pjūvį 1-1.

Šio ilgo metodikos nurodymo esmę trumpai išreiškia dvi paprastos EM laukų bangolaidžiuose braižymo schemas (5.3 pav.):



5.3 pav. EM laukų bangolaidžiuose braižymo schemas

Jose galima išskirti dvi pagrindines horizontalias $\mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{J}_{sl} \rightarrow \mathbf{E}$ (5.3 pav. *a*) ir $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{J}_{sl} \rightarrow \mathbf{H}$ (5.3 pav. *b*) bei dvi antraeiles vertikalias $\mathbf{J}_{sl} \rightarrow \mathbf{J}_{IS}$ ir $\mathbf{E} \rightarrow q_S$ šakas. Pagrindinės šakos sukamos aplink slinkties srovės tankio vektorių $\mathbf{J}_{sl}$, be kurio apskritai nebūtų elektromagnetinių laukų ir bangų.

Šios schemas nurodo EM laukų bangolaidžiuose braižymo seką: 1) pagal užduotą bangos tipą H_{mn} (E_{mn}) braižomos pasiskirstymo funkcijos ir išilginės H_z (E_z) komponentės bangolaidžio skerspjūvyje A-A; 2) pagal H_z (E_z) komponentes braižomos visos magnetinio lauko stiprio $\mathbf{H}$ (elektrinio lauko stiprio $\mathbf{E}$) linijos išilginiame pjūvyje 1-1; 3) pagal $\mathbf{H}$ ($\mathbf{E}$) linijas braižomos visos slinkties ir laidžio srovių tankių $\mathbf{J}_{sl}$, $\mathbf{J}_{IS}$ linijos pjūviuose 1-1, A-A ir B-B; 4) pagal $\mathbf{J}_{sl}$, $\mathbf{J}_{IS}$ linijas braižomos $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ ($\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$) linijos pjūviuose 1-1 ir B-B; 5) pagal $\mathbf{E}$ linijas braižomi kriviai q_S skerspjūvyje B-B. Visos linijos turi atitikti ribines sąlygas bangolaidžio sienelių paviršiuose ir matytis ne mažiau kaip dviejuose bangolaidžio pjūviuose. Nė viename pjūvyje negali būti linijų, kurių nėra kitame pjūvyje.

Visi pateikti EM laukai nubraižyti, nenaudojant nė vienos formulės. Taikyti tik bendriausi EM lauko teorijos principai ir dešiniojo kumščio

taisyklė, kuriuos, deja, reikia žinoti. Nubraižius EM laukų linijas, būtina aptarti bangų žadinimą bangolaidžiuose strypeliu, kilpa arba plyšiu.

Strypelis yra į bangolaidžio vidų įvedamas bendraašės linijos vidinis laidininkas. Išorinis jos laidininkas sujungiamas su bangolaidžiu išorėje ir neturi ekranuoti strypelio bangolaidžio viduje. Tiesus strypelis turi įeiti į bangolaidį toje vietoje, kurioje yra žadinamos bangos elektrinio lauko stiprio maksimumas. Strypelis turi būti lygiagretus šio lauko linijoms. 5.1 pav. toks strypelis parodytas išilginio pjūvio 1-1 pjūvyje B-B ir viršutiniame kairiajame skerspjūvyje B-B. Jis įvestas apatinės bangolaidžio sienelės viduryje. 5.2 pav. strypelis turėtų būti parodytas išilginio pjūvio 1-1 pjūvyje B-B ir viršutiniame kairiajame skerspjūvyje B-B. Jis galėtų būti įvestas kairiosios bangolaidžio sienelės viduryje, bet ten yra kilpa, kuri skerspjūvyje B-B atrodo kaip strypelis. Bėgančioji banga E_{11} sklinda idealiuoju bangolaidžiu nekeisdama laukų linijų. Todėl strypelį galima įvesti bet kurioje vietoje kairiosios arba dešinėsios sienelių viduryje. Tačiau tokiam strypeliui parodyti prireiks trečio skerspjūvio.

Kilpa sudaroma iš bendraašės linijos vidinio laidininko, o jos galas ir linijos išorinis laidininkas sujungiami su bangolaidžio sienele. Kilpa į bangolaidį įvedama toje vietoje, kurioje turi būti žadinamos bangos magnetinio lauko stiprio maksimumas. Kilpa orientuojama taip, kad jos plokštuma būtų statmena žadinamos bangos magnetinio lauko linijoms. 5.1 pav. tokia kilpa įvesta viršutinio kairiojo skerspjūvio A-A apačioje, kur magnetinio lauko linijų tankis yra didžiausias. Ta pati kilpa atrodo kaip strypelis išilginio pjūvio 1-1 pjūvyje A-A. 5.2 pav. kilpa jau minėta anksčiau.

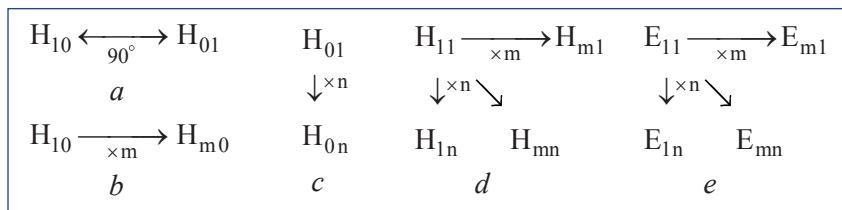
Bendraašės linijos, strypeliais ir kilpomis žadinančios EM laukus bangolaidžiuose, sudaro su jais koaksialines-bangolaidines perėjas.

Bangai žadinti bangolaidyje galima taikyti jo sienelėje išpjautą siaurą ilgą plyšį, statmenai kertantį sienele tekančią laidžio srovę. Plyšys bangolaidyje išpjauamas toje vietoje, kurioje turi būti bangos laidžio srovės tankio maksimumas. 5.1 pav. toks plyšys parodytas viršutinio kairiojo skerspjūvio A-A apačioje ir išilginio pjūvio 1-1 dešiniojoje pastorintoje sienelėje (pjūvyje A-A), kur laidžio srovės linijų tankis yra didžiausias. Čia

plyšys išdėstytas horizontaliai. 5.2 pav. plyšys parodytas viršutinio dešiniojo skerspjuvio B-B ir išilginio pjūvio 1-1 dešiniojoje pastorintoje sieneleje (pjūvyje B-B), kur irgi laidžio srovės linijų tankis yra didžiausias. Čia jau plyšys išdėstytas vertikaliai. Bet laidžio srovė per plyšius neteka, todėl abiejuose plyšiuose ji virsta slinkties srove.

Plyšiais EM laukus bangolaidžiuose žadina kiti bangolaidžiai, kartu sudarantys bangolaidines perėjas.

Čia apskaičiavome aštuonių tipų bangų krizinius ilgius, pagrindinės H_{10} ir E_{11} bangų duomenis bei nubraižėme H_{10} , E_{11} bangų EM laukus metaliniuose stačiakampiuose bangolaidžiuose. Supratęs šių laukų sandaros principus, galima aukštesnių H_{mn} ir E_{mn} tipų bangų laukus braižyti pagal 5.3 pav. schemas. Bet galima tai padaryti ir paprasčiau. 5.4 pav. pateiktos žemiausių tipų bangų taikymo aukštesnių tipų bangų laukams sudaryti schemas. H_{01} bangos laukas yra toks pats, kaip H_{10} laukas, tik pasuktas 90° kampu bangolaidžio atžvilgiu (5.4 pav. a). H_{m0} bangų laukai nubraižomi pakartojant H_{10} lauką m kartų pagal horizontalę (5.4 pav. b). H_{0n} bangų laukai gaunami pakartojant H_{01} lauką n kartų pagal vertikale (5.4 pav. c). H_{11} bangos laukas gaunamas kaip H_{10} ir H_{01} laukų kombinacija, įvertinant H_z pasiskirstymą prie sienelių tik pagal $\cos$ funkcijas. H_{mn} (E_{mn}) bangų laukai yra H_{11} (E_{11}) laukų kartotiniai m kartų pagal horizontalę ir n kartų pagal vertikale (5.4 pav. d, e).



5.4 pav. Žemiausių tipų bangų taikymas aukštesnių tipų bangoms sudaryti

Tik reikia, pereinant nuo vieno elementaraus lauko prie gretimo, pakeisti EM laukų linijų kryptis taip, kad gretimos linijos būtų vienodos krypties, o tolimesnės – priešingų krypčių [12].

5.2. Laukai apskrituose bangolaidžiuose

Metaliniuose apskrituose bangolaidžiuose sklindančių E_{mn} bangų momentinės elektrinio lauko išilginių komponentių reikšmės yra:

$$E_z(x, y, z, t) = E_{z0} J_m(u_{mn}r/a) \cos(m\varphi) \cos(\omega t - \beta_b z), \quad (5.9)$$

čia E_{z0} – maksimali amplitudė; J_m – pirmojo tipo m -osios eilės Beselio specialioji cilindrinė funkcija; $(u_{mn}r/a)$ – Beselio funkcijos argumentas; u_{mn} – m -osios eilės Beselio funkcijos n -oji šaknis; r – cilindrinės koordinatų sistemos spindulys; a – apskrito bangolaidžio spindulys; φ – cilindrinės sistemos azimutinė koordinatė; $m = 0, 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$.

Indeksai m nurodo eiles Beselio funkcijų, pagal kurias išilginių elektrinio lauko komponentių E_z stovinčiosios bangos pasiskirsto išilgai bangolaidžių spindulių r , ir skaičius SB, pasiskirsčiusių pagal $\cos$ funkciją išilgai bangolaidžių perimetrų (pagal koordinatę φ). Indeksai n nurodo numerius Beselio funkcijų šaknų u_{mn} , iki kurių pasiskirsto E_z išilgai bangolaidžių spindulių nuo centrų iki sienelių, kur $r = a$ [12]. Pagal ribines sąlygas prie metalinių sienelių gaunami SB mazgai. E_{mn} tipų bangos su $n = 0$ apskrituose metaliniuose bangolaidžiuose nesklinda, nes negaunamos SB išilgai r .

Metaliniuose apskrituose bangolaidžiuose sklindančių H_{mn} bangų momentinės magnetinio lauko išilginių komponentių reikšmės yra:

$$H_z(x, y, z, t) = H_{z0} J'_m(u'_{mn}r/a) \cos(m\varphi) \cos(\omega t - \beta_b z), \quad (5.10)$$

čia H_{z0} – maksimali amplitudė; $(u'_{mn}r/a)$ – Beselio specialiosios cilindrinės funkcijos argumentas; u'_{mn} – m -osios eilės Beselio funkcijos išvestinės pagal r n -oji šaknis.

Indeksai m nurodo eiles Beselio funkcijų, pagal kurias išilginių magnetinio lauko komponentių H_z stovinčiosios bangos pasiskirsto išilgai bangolaidžių spindulių r , ir skaičius SB, pasiskirsčiusių pagal $\cos$ funkciją

išilgai bangolaidžių perimetru (pagal koordinatę φ). Indeksai n nurodo numerius Beselio funkcijų ekstremumų (išvestinių šaknų u'_{mn}), iki kurių pasiskirsto H_z išilgai bangolaidžių spindulių nuo centrų iki sienelių, kur $r = a$. Pagal ribines sąlygas prie metalinių sienelių gaunami SB pūpsniai. H_{mn} tipų bangos su $n = 0$ metaliniuose apskrituose bangolaidžiuose irgi nesklinda.

Idealiuosiuose reguliariuose, be galo ilguose, metaliniuose apskrituose bangolaidžiuose išilgai ašies z sklinda tik bėgančiosios bangos. E_{mn} ir H_{mn} tipų bangų kriziniai ilgiai skaičiuojami pagal skirtingas formules:

$$\lambda_{kr E_{mn}} = 2\pi a / u_{mn}, \quad \lambda_{kr H_{mn}} = 2\pi a / u'_{mn}. \quad (5.11)$$

Įstačius į (5.11) formules Beselio specialiųjų cilindrinų funkcijų ir jų išvestinių šaknis [12], gaunami metaliniuose apskrituose bangolaidžiuose sklindančių bangų kriziniai ilgiai, nurodyti 5.4 lentelėje.

5.4 lentelė. Metalinių apskritų bangolaidžių bangų kriziniai ilgiai

Banga Ilgis	E_{21}	H_{31}	E_{11}	H_{01}	H_{21}	E_{01}	H_{11} pagr.
$\lambda_{kr mn}$	1,22a	1,50a	1,64a	1,64a	2,06a	2,61a	3,41a

Pagal 5.4 lentelės duomenis sudaroma bangų tipų diagrama [12]. Joje išskiriamos 3 sritys pagal T bangų ilgius neribotame ore (indeksas o). 1 srityje yra $\lambda_o \geq 3,41a$ ir metaliniuose apskrituose bangolaidžiuose EM bangos nesklinda. 2 srityje yra $2,61a \leq \lambda_o < 3,41a$ ir sklinda tik H_{11} tipo banga. Jos krizinis ilgis $\lambda_{kr 11} = 3,41a$ yra didžiausias. Todėl ji vadinama pagrindine banga. 3 srityje yra $\lambda_o < 2,61a$ ir bangolaidžiuose kartu su H_{11} banga gali sklisti be galo daug E_{mn} ir H_{mn} aukštesniųjų tipų bangų.

E_{mn} ir H_{mn} tipų bangų su vienodomis indeksų $m \neq 0$ bei $n \neq 0$ poromis – E_{11} , H_{11} ; E_{21} , H_{21} kriziniai ilgiai $\lambda_{kr mn}$ yra nevienodi. Jų formulėse (5.4 lentelė) yra vienintelis realus teoriškai be galo ilgų metalinių bangolaidžių matmuo – vidinis apskrito skerspjūvio spindulys a .

Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

5.5. Metaliniame apskritame bangolaidyje sklinda pagrindinė banga, kurios krizinis dažnis 10 GHz. Nurodykite šios bangos tipą, apskaičiuokite jos greičius $v_{f\max}$, $v_{f\min}$, $v_{gr\max}$, $v_{gr\min}$ ir ilgius $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$ ore bei bangolaidyje, užpildytame oru. Pateikite skaičiavimo rezultatus lentelėje, suformuluokite išvadas apie bangolaidžio įtaką bangos parametrms.

Sprendimas: T bangos faziniai ir grupiniai, didžiausi ir mažiausi greičiai neribotame ore (indeksas o) yra vienodi:

$$v_{fo\max} = v_{fo\min} = v_{gro\max} = v_{gro\min} = v_{fo} \approx c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Pagrindinė banga metaliniame apskritame bangolaidyje yra H_{11} .

Apskaičiuojamas H_{11} krizinis (didžiausias sklidimo neribotame ore 2 srities) bangos ilgis, įvertinant 5.4 lentelės duomenis:

$$\lambda_{kr11} = \lambda_{o\max} = v_{fo} / f_{kr11} \approx 3 \cdot 10^8 / 10 \cdot 10^9 = 0,03 \text{ m} = 3,41a.$$

Metalinio apskrito bangolaidžio spindulys yra:

$$a = \lambda_{kr11} / 3,41 = 0,03 / 3,41 = 0,0088 \text{ m} = 8,8 \text{ mm.}$$

Nustatomas tik H_{11} mažiausias (sklidimo neribotame ore 2 srities) bangos ilgis, įvertinant 5.4 lentelės duomenis:

$$\lambda_{o\min} = 2,61a = 2,61 \cdot 0,0088 = 0,023 \text{ m} = 23 \text{ mm.}$$

Bangos H_{11} didžiausias ilgis metaliniame apskritame bangolaidyje, užpildytame oru (bo), yra:

$$\lambda_{bo\max} = \frac{\lambda_{o\max}}{\sqrt{1 - (\lambda_{o\max} / \lambda_{kr11})^2}} = \frac{0,03}{\sqrt{1 - (0,03/0,03)^2}} = \infty \text{ m.}$$

Randamas bangos H_{11} mažiausias ilgis bangolaidyje:

$$\lambda_{bo\min} = \frac{\lambda_{o\min}}{\sqrt{1 - (\lambda_{o\min} / \lambda_{kr11})^2}} = \frac{0,023}{\sqrt{1 - (0,023/0,03)^2}} = 0,036 \text{ m.}$$

Bangos H_{11} didžiausias fazinis greitis bangolaidyje yra:

$$v_{fo \max} = \frac{v_{fo \max}}{\sqrt{1 - (\lambda_{o \max} / \lambda_{kr11})^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - (0,03/0,03)^2}} = \infty \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Apskaičiuojamas bangos H_{11} mažiausias fazinis greitis metaliniame apskritame bangolaidyje, užpildytame oru:

$$v_{fo \min} = \frac{v_{fo \min}}{\sqrt{1 - (\lambda_{o \min} / \lambda_{kr11})^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - (0,023/0,03)^2}} = 4,67 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Bangos H_{11} didžiausias grupinis greitis bangolaidyje yra:

$$v_{grbo \max} = v_{fo \max} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{o \min}}{\lambda_{kr11}} \right)^2} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{0,023}{0,03} \right)^2} = 1,93 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nustatomas bangos H_{11} mažiausias grupinis greitis bangolaidyje:

$$v_{grbo \min} = v_{fo \min} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_{o \max}}{\lambda_{kr11}} \right)^2} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{0,03}{0,03} \right)^2} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Užpildoma 5.5 lentelė.

5.5 lentelė. 5.5 užduoties sprendimo rezultatai

Terpė \ Rezultatai	$v_{f \max}$ m/s	$v_{f \min}$ m/s	$v_{gr \max}$ m/s	$v_{gr \min}$ m/s	$\lambda_{\max}$ m	$\lambda_{\min}$ m
Oras	$3 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^8$	0,03	0,023
Bangolaidis	∞	$4,67 \cdot 10^8$	$1,93 \cdot 10^8$	0	∞	0,036

Išvados: 1) neribotame ore sklindančios plokščiosios vienylytės T bangos faziniai ir grupiniai, didžiausi ir mažiausi greičiai yra vienodi ir lygūs c_0 .

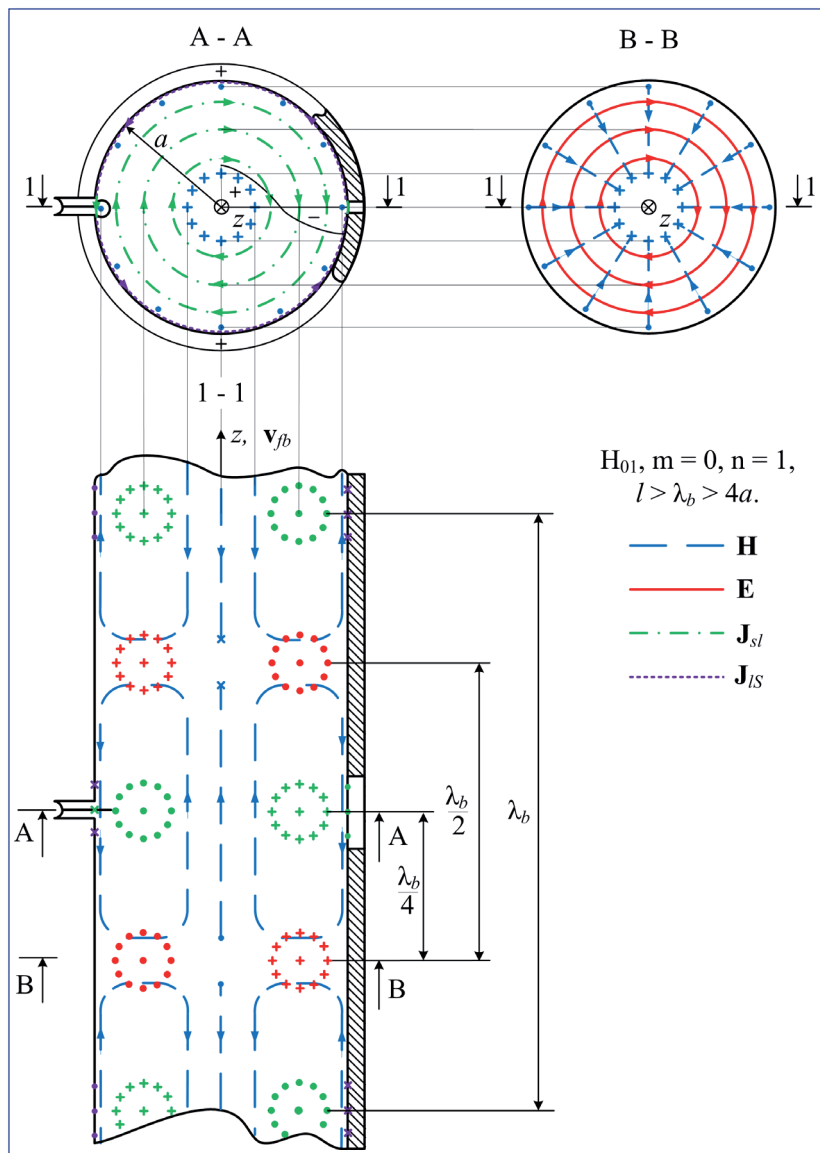
2) dėl T bangos kritimo kampu bei atspindžių nuo sienelių metaliniame apskritame bangolaidyje susidaro interferencinė plokščioji ir nevienalytė pagrindinė H_{11} banga. Ji sklinda viena, kai T bangos ilgis neribotame ore yra $2,61a \leq \lambda_o < 3,41a$.

3) bangolaidis, nekeisdamas dažnio, pakeičia bangos tipą, padidina fazinį greitį ir pailgina bangą iki ∞ , palyginti su greičiu $v_{fo} \approx c_0$ ir ilgiu λ_o neribotame ore. Net mažiausias H_{11} bangos ilgis $\lambda_{bomin} = 0,036$ m viršija $\lambda_{kr11} = \lambda_{omax} = 0,03$ m. Tuo tarpu grupinį greitį bangolaidis mažina nuo $v_{grbomax} = 1,93 \cdot 10^8$ m/s $< c_0$ iki 0.

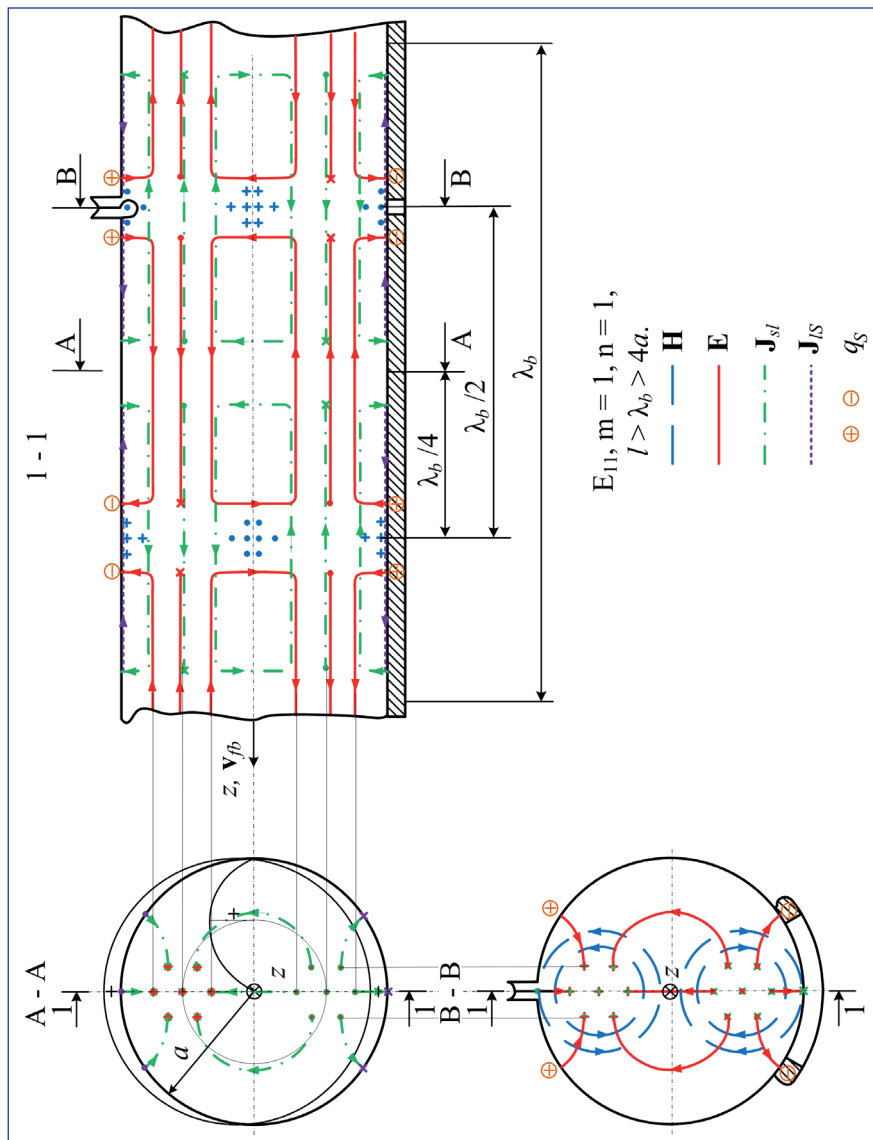
5.6. Nubraižykite H_{01} (E_{11}) bangos, žadinamos strypeliu, kilpa arba plyšiu metaliniame apskritame bangolaidyje ($l > \lambda_b > 4a$) EM lauko vektorių E , J_{sl} , H , J_{ls} linijas ir paviršinius krūvius q_s . Aptarkite žadinimo būdo parinkimą.

Sprendimas [12]: pateiktas 5.5 (5.6) pav. Iš esmės H_{mn} , E_{mn} bangų tipų žymėjimo, jų EM laukų braižymo ir žadinimo metaliniuose apskrituose bangolaidžiuose principai yra tokie patys, kaip ir stačiakampiuose bangolaidžiuose (žr. 5.4 užduotį). Todėl čia jų nekartosime, o atkreipsime dėmesį tik į svarbiausius skirtumus.

H_{mn} , E_{mn} bangų su m indeksais laukų išilginių komponentių pasiskirstymą išilgai apskritų bangolaidžių spindulių aprašo Beselio funkcijos su eilės numeriais $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Nulinės eilės Beselio funkcija J_0 yra panaši į gęstančią kosinusoide, kurios pirmasis pusbangis panaudotas 5.5 pav. (H_{01} banga, A-A skerspjūvis). Pirmosios eilės Beselio funkcija J_1 yra panaši į gęstančią sinusoidę, kurios pirmasis pusbangis panaudotas 5.6 pav. (E_{11} banga, A-A skerspjūvis). Tai yra esminis įsidėmėtinas jų skirtumas. Antrosios eilės Beselio funkcija J_2 panaši į gęstančią sinusoidę su kvadratinės parabolės pradine dalimi. Trečiosios eilės Beselio funkcija J_3 yra panaši į gęstančią sinusoidę su kubinės parabolės pradine dalimi ir t. t. Pirmosios ir aukštesniųjų eilių Beselio funkcijos skiriasi statėjančiomis pradinėmis dalimis, mažėjančiais ekstremumų dydžiais, jų ir šaknų argumentais [12]. Tačiau visos jos yra panašios į gęstančias sinusoides. Todėl kiekvienos iš jų aprašomas EM lauko išilginių komponentių pasiskirstymas apskritų bangolaidžių skerspjūviuose yra panašus.



5.5 pav. H_{01} bangos EM laukas metaliniame apskritame bangolaidyje, žadinamame kilpa arba plyšiu



5.6 pav. E_{11} bangos EM laukais apskritame bangolaidyje, žadinamame strypeliu, kilpa arba plyšiu

Didelę įtaką EM lauko išilginių komponentių pasiskirstymui pagal $\cos(m\varphi)$ funkciją išilgai apskritų bangolaidžių perimetrų turi bangų tipų indeksų $m=0, 1, 2, 3, \dots$ reikšmės. Kai $m=0$, gaunama $\cos 0 = 1 = \text{const}$ ir 5.5 pav. skerspjūvio A-A išorėje išilgai perimetro braižomas tolygaus pasiskirstymo teigiamasis (+) apskritimas H_{01} bangos H_z komponentėms. E_{11} bangos $m=1$, todėl 5.6 pav. skerspjūvyje A-A, būtinai pradedant nuo viršaus, išilgai perimetro braižoma pagal $\cos\varphi$ funkciją kintanti viena stovinčioji banga E_z komponentėms. Čia viršutinis SB pusbangis yra bangolaidžio išorėje ir laikomas teigiamuoju (+), o apatinis viduje ir žymimas neigiamuoju (-). H_{mn} (E_{mn}) bangų indeksai n nurodo numerius Beselio funkcijų ekstremumų (šaknų), iki kurių pasiskirsto H_z (E_z) išilgai bangolaidžių spindulių nuo centrų iki sienelių. H_{01} bangai 5.5 pav. skerspjūvyje A-A nuo centro ant horizontalios ašies braižoma nulinės eilės Beselio funkcija J_0 iki pirmojo ekstremumo ant bangolaidžio sienelės. Pažymimi esantys virš ašies teigiamasis (+) ir po ašimi neigiamasis (-) SB ketvirčiai. Ant sienelės gaunamas vieno H_z pusbangio pūpsnis. E_{11} bangai 5.6 pav. skerspjūvyje A-A nuo centro ant horizontalios ašies braižoma pirmosios eilės Beselio funkcija J_1 iki pirmosios šaknies ant bangolaidžio sienelės. Pažymimas esantis virš ašies teigiamasis (+) SB pusbangis. Centre ir ant sienelės gaunami vieno E_z pusbangio mazgai. Pūpsnis yra tarp bangolaidžio centro ir sienelės. Per pūpsnį nubraižoma vertikali linija iki susikirtimo su horizontalia ašimi, o per jų susikirtimo tašką – pagalbinis apskritimas, kertantis vertikalią ir horizontalią ašis (5.6 pav.).

Po to sudauginamos EM lauko išilginių komponentių pasiskirstymo išilgai bangolaidžių perimetro ir spindulio funkcijos (5.4 užduotis). Sudauginus H_{01} bangos (5.5 pav.) tolygaus pasiskirstymo išilgai perimetro teigiamąją (+) funkciją iš nulinės eilės Beselio funkcijos J_0 pirmojo teigiamąjo (+) SB ketvirčio atveju, braižomos bangolaidžio centre tolygiai pasiskirsčiusios nueinančios (+) H_z komponentės. Tolstant nuo centro Beselio funkcija pereina 0, todėl skerspjūvio A-A viduryje H_z komponentių nėra. Sudauginus tolygaus pasiskirstymo išilgai perimetro teigiamąją (+) funkciją iš nulinės eilės Beselio funkcijos J_0 antrojo SB neigiamąjo (-) ketvirčio

atveju, braižomas toks pat, kaip ir nueinančių, tolygiai prie bangolaidžio sienelės pasiskirsčiusių ateinančių ($\cdot$) H_z komponenčių skaičius. Nueinančios ir ateinančios H_z komponentės sudaro su skersinėmis komponentėmis (skerspjūvis B-B) magnetinio lauko žiedus, nubraižytus išilginiame pjūvyje 1-1. Šių žiedų viduryje pagal dešiniojo kumščio taisyklę braižomi nueinančių ir ateinančių slinkties srovės tankio vektorių $\mathbf{J}_{sl}$ kryžiuokai ir taškai. H_{01} banga pasižymi tuo, kad jos slinkties srovės užsidaro žiedais bangolaidžio dielektrike ir nepereina į paviršines laidžio sroves, taip pat užsidarančias, tik priešingos krypties žiedais, sienelėse (skerspjūvis A-A). Laidžio srovių ir magnetinio lauko žiedų kryptys irgi susietos dešiniojo kumščio taisykle. $\mathbf{J}_{sl}$ žiedams analogiškai, bet išilginiame pjūvyje 1-1 atstumu $\lambda_b/4$ atsiliekantys elektrinio lauko žiedai yra lygiagretūs bangolaidžio sienelėms ir dėl ribinių sąlygų nepasiekia jų bei nesukuria jose elektros krūvių (skerspjūvis B-B). Dėl žiedinio elektrinio lauko neįmanoma lygiagrečiai jo linijoms įvesti tiesaus strypelio H_{01} bangai žadinti. Ją žadina tik statmenai magnetinio lauko žiedus kertanti kilpa arba paviršinės laidžio srovės kertantis plyšys (5.5 pav. pjūviai A-A, 1-1).

Pagal E_{11} bangos išilginių komponentių pasiskirstymo apskrito bangolaidžio skerspjūvyje A-A (5.6 pav.) funkcijas E_z negali būti ant horizontalios ašies ir prie metalinių sienelių, nes čia šios funkcijos pereina 0. E_z koncentruojasi dviejose vietose ant vertikalios ašies, kur pagalbinis apskritimas, atitinkantis Beselio funkcijos ekstremumo argumentą, kerta šią ašį. Sudauginus E_z pasiskirstymo išilgai perimetro funkciją $\cos l\varphi$ ir pirmosios eilės Beselio funkciją J_1 teigiamųjų (+) pusbangių atvejais, braižomos virš bangolaidžio centro nueinančios (+) E_z komponentės. Iš jų sienelės ir centro kryptimis turi nueiti bent po 3 skersines E_s komponentes. Todėl E_z komponentių reikia mažiausiai $2 \times 3 = 6$. Sudauginus E_z pasiskirstymo išilgai perimetro funkciją neigiamojo (–) pusbangio atveju ir Beselio funkciją J_1 teigiamojo (+) pusbangio atveju, braižomos 6 po bangolaidžio centru ateinančios ($\cdot$) E_z komponentės. Iš jų sienelės ir centro kryptimis turi ateiti irgi bent po 3 skersines E_s komponentes. Nueinančios ir ateinančios E_z bei sienelės kryptimis E_s komponentės sudaro bangolaidyje

elektrinio lauko pusžiedžius, pagal ribines sąlygas statmenus sieniei prie jos (5.6 pav. pjūviai 1-1, B-B). Šiose vietose kaupiasi elektros krūviai ir galima įvesti strypelį, lygiagretų skersinėms E_s komponentėms, E_{11} bangai žadinti. Nueinančios ir ateinančios E_z bei centro kryptimis E_s komponentės sudaro bangolaidyje elektrinio lauko žiedus (pjūviai 1-1, B-B). Analogiškus, tik atstumu $\lambda_b/4$ aplenkiančius, pusžiedžius ir žiedus sudaro slinkties srovės tankio $\mathbf{J}_{sl}$ linijos dielektrike. Statmenai pasiekusios sienelę, jos pereina į tos pačios krypties paviršinę laidžio srovę ir taip susidaro srovių žiedai (pjūvis 1-1). Jų viduje pagal dešiniojo kumščio taisyklę braižomi magnetinio lauko linijų kryžiukai ir taškai, skerspjūvyje B-B pereinantys į žiedus, lygiagrečius bangolaidžio sieniei prie jos. Čia galima įvesti statmenai magnetinio lauko žiedus kertančią kilpą arba paviršinės laidžio srovės kertantį plyšį E_{11} bangai žadinti. Skerspjūvyje B-B kilpa atrodo kaip strypelis, kuris irgi gali čia būti, todėl galima rinktis vieną iš šių žadinimo elementų.

Čia apskaičiavome pagrindinės H_{11} bangos duomenis ir nubraižėme H_{01} , E_{11} bangų EM laukus metaliniuose apskrituose bangolaidžiuose. Supratęs šių laukų sandaros principus, galima kitų H_{mn} ir E_{mn} tipų bangų laukus braižyti pagal 5.3 pav. schemas. Deja, 5.4 pav. schemos tam dauguma atvejų netinka.

5.3. Laukai bangolaidiniuose rezonatoriuose

Bangolaidiniai rezonatoriai yra metalinių stačiakampio, apskrito ar kt. skerspjūvio, dažniausiai oru užpildytų bangolaidžių atkarpos. Jų abudu galai uždaryti laidžiomis plokštelėmis. Dėl to rezonatoriuose, kitaip nei be galo ilguose bangolaidžiuose, bangos nebėga ir susidaro stovinčiosios bangos. Rezonatorių rezonansiniai ilgiai l_r yra lygūs sveikam skaičiui p pusbangių $\lambda_b/2$ [12]:

$$l_r = p \frac{\lambda_b}{2} = \frac{p}{2} \frac{\lambda_r}{\sqrt{1 - (\lambda_r/\lambda_{kr})^2}}, \quad (5.12)$$

čia λ_b – bangų bangolaidiniuose rezonatoriuose ilgiai; λ_r – bangų ore rezonansiniai ilgiai, kuriems esant rezonuoja rezonatoriai; λ_{kr} – bangų rezonatoriuose kriziniai ilgiai; $p = 1, 2, 3, \dots$.

EM bangų tipus bangolaidiniuose rezonatoriuose nurodo žymenys su 3 indeksais, pvz., E_{mnp} , H_{mnp} . Trečiasis indeksas p nurodo, kiek E_{mn} arba H_{mn} tipo SB pusbangių telpa išilgai rezonatoriaus.

Tų pačių bangų EM laukai bangolaidiniuose rezonatoriuose iš esmės nesiskiria nuo laukų be galo ilguose bangolaidžiuose. Ir rezonatorių, ir bangolaidžių skerspjūviuose gaunamos stovinčiosios bangos. Tačiau išilgai rezonatorių egzistuoja SB su elektrinio lauko stiprio mazgais ant galinių laidžių plokštelių, o begaliniuose bangolaidžiuose sklinda bėgančiosios bangos (BB). Bangolaidžiuose slinkties srovės aplenkia elektrinius laukus atstumu $\lambda_b/4$ bangų sklidimo kryptimi, laike periodo ketvirčiu $T/4$ ir faze kampu $\pi/2$. Jeigu ir rezonatoriuose slinkties srovės aplenkėtų elektrinius laukus atstumu $\lambda_b/4$, gautųsi slinkties srovių pūpsniai ant galinių laidžių plokštelių. Tai neįmanoma pagal ribines sąlygas, be to, slinkties srovės turi tekėti dielektrikuose, o idealiuosiuose laidininkuose gali tekėti tik laidžio srovės. Todėl elektrinių laukų ir slinkties srovių SB pūpsniai bei mazgai susidaro tuose pačiuose rezonatorių pjūviuose, pvz., galuose yra tik mazgai. Bet vis tiek slinkties srovės aplenkia elektrinius laukus

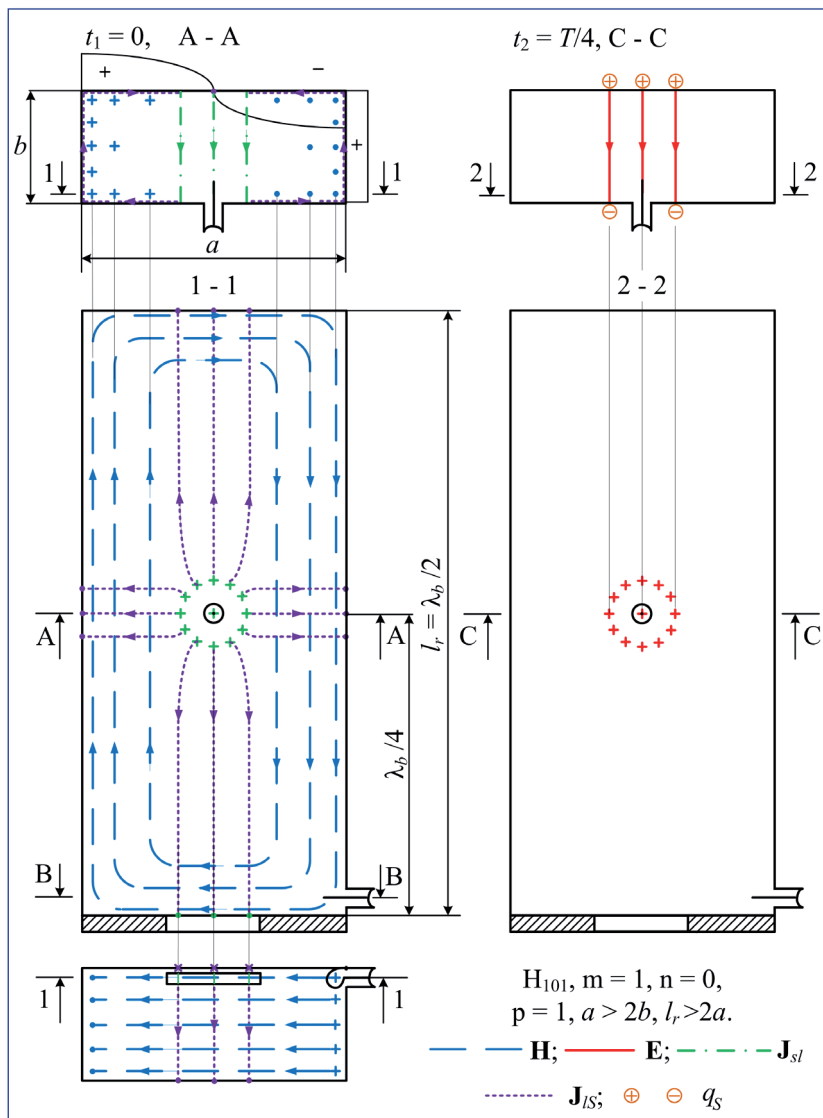
laike periodo ketvirčiu $T/4$ ir faze kampu $\pi/2$. Tai reiškia, kad, kai pradinio laiko momentu $t_1 = 0$ slinkties srovių ir magnetinių laukų stipriai yra didžiausi, tai elektrinių laukų stipriai lygūs nuliui. Po periodo ketvirčio, laiko momentu $t_2 = -T/4$ elektrinių laukų stipriai taps didžiausi, o slinkties srovių ir magnetinių laukų stipriai bus lygūs nuliui. Taigi rezonatoriuose slinkties srovės ir elektriniai laukai sutaps erdvėje, tačiau bus išskirti laike, t. y. braižomi dviem skirtingais laiko momentais. Dėl to padaugės, lyginant su bangolaidžiais, rezonatorių pjūvių iki 5–6. Tačiau pjūviai bus neperkrauti ir paprastesni, nes slinkties srovių bei elektrinių laukų linijos sutaps bei galės būti tiesiog kopijuojamos.

Dažnai rezonatoriai yra perderinami, keičiant jų rezonansinius ilgius ir dažnius viename gale įtaisytais stūmokliais. Bet stūmokliai perstumia EM laukus, kurių stiprio maksimumai keičia vietas. Tai blogina bangų žadinimo rezonatoriuose sąlygas, nes strypeliai, kilpos ir plyšiai turi būti įvesti atitinkamai elektrinio, magnetinio laukų bei laidžio srovių didžiausių stiprių vietose. Be to, šie bangų žadinimo elementai gali riboti stūmoklių judėjimą. Todėl strypeliai, kilpos ir plyšiai įvedami priešinguose stūmokliams rezonatorių galuose.

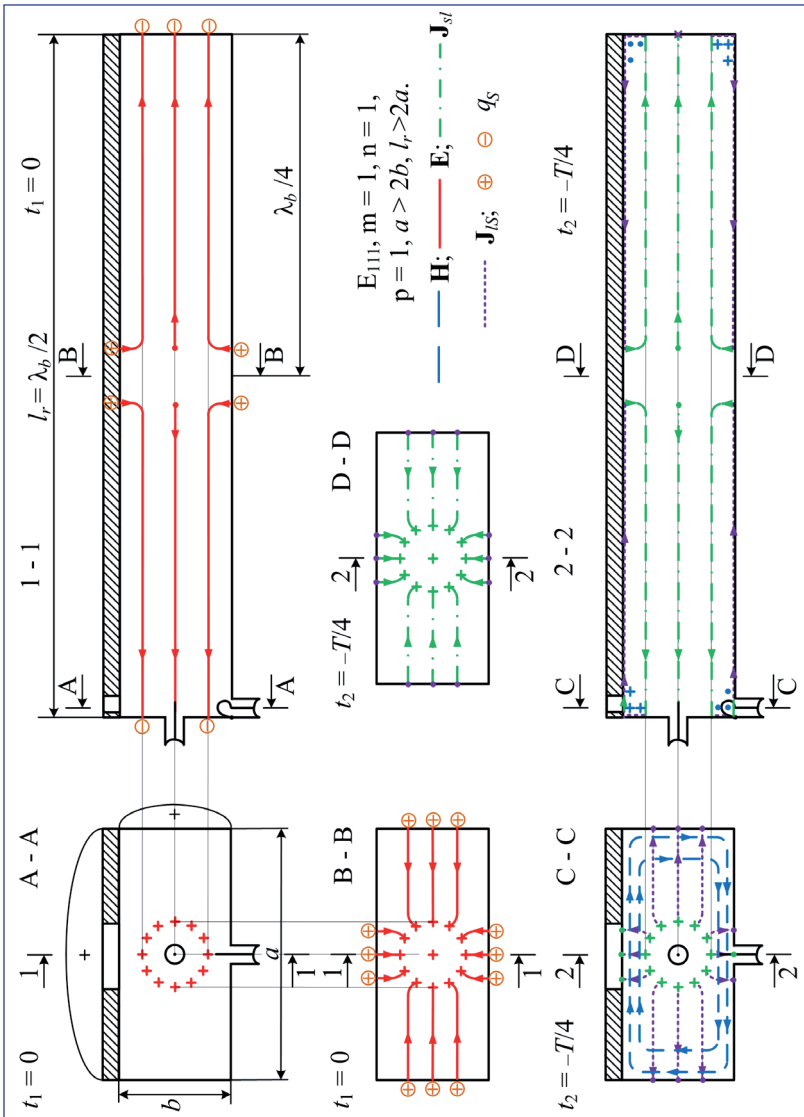
Užduotys ir sprendimų metodikos nurodymai

5.7. *Nubraižykite H_{101} (E_{111}) bangos, žadinamos strypeliu, kilpa arba plyšiu stačiakampiam bangolaidiniame rezonatoriuje ($a > 2b$, $l_r > 2a$, žadinama gale) EM lauko vektorių $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}_s$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}_s$ linijas ir paviršinius krūvius q_s . Aptarkite žadinimo būdo parinkimą.*

Sprendimas [12]: pateiktas 5.7 (5.8) pav. Visų pirma reikia atkreipti dėmesį, kad H_{101} (E_{111}) bangos EM laukas metaliniame stačiakampiam bangolaidyje jau buvo pavaizduotas 5.1 (5.2) pav. Taip pat gana detalai aprašyta to lauko braižymo metodika. Ši užduotis skiriasi tuo, kad reikia nubraižyti iš esmės tos pačios bangos H_{101} (E_{111}), tik su trečiu indeksu $p = 1$, lauką stačiakampiam rezonatoriuje. Bangolaidis skiriasi nuo rezonatoriaus ilgiu: $l_b = \infty$, o $l_r = p\lambda_b/2 = 1 \cdot \lambda_b/2 = \lambda_b/2 > 2a$. Tai keičia EM lauko braižymo metodiką [12].



5.7 pav. H_{101} bangos EM laukai stačiakampiniame bangolaidiniame rezonatoriuje, žadinamame strypeliu, kilpa arba plyšiu



5.8 pav. E_{111} bangos EM laukas stačiakampiniame bangolaidiniame rezonatoriuje, žadinamame strypeliu, kilpa arba plyšiu

Vietoje trijų bangolaidžio pjūvių (5.1, 5.2 pav.), reikia paruošti 5–6 rezonatoriaus pjūvius (5.7, 5.8 pav.) – po 3–2 pjūvius dviem skirtingiems laiko momentams $t_1 = 0$ ir $t_2 = \pm T/4$, kuriuos reikia užrašyti virš pjūvių. Po to nedelsiant apriboti galinėmis plokštelėmis ir nurodyti išilginių pjūvių 1-1, 2-2 ilgį, už kurio ribų negali būti jokių rezonatoriaus EM laukų, nes juos ekranuoja galinės plokštelės.

H_{10} ir H_{101} bangų magnetinių laukų, slinkties bei laidžio srovių braižymo metodikos ir linijos 5.1, 5.7 pav. skerspjūviuose A-A yra visiškai vienodos. Išilginiuose pjūviuose 1-1 jos neesminiai skiriasi dėl skirtingų pusbangių $\lambda_b/2$ ilgių ir kitokio žadinimo elementų išdėstymo. Rezonatoriaus pjūvyje 1-1 magnetinio lauko linijos yra lygiagretės galinėms plokštelėms, kurių nėra bangolaidyje. Be to, rezonatoriuje nerodoma ašis z bei fazinio greičio vektorius $\mathbf{v}_{fb}$, nes banga nesklinda. Skerspjūviuose B-B skiriasi išilginių magnetinio lauko komponentių H_z kryptys dėl priešingų žiūrėjimo krypčių bangolaidžio ir rezonatoriaus išilginiuose pjūviuose 1-1. Rezonatoriaus skerspjūvyje B-B parodyta paviršinė laidžio srovė galinėje plokštelėje. Bet jokiuose pjūviuose laiko momentu $t_1 = 0$ nėra elektrinio lauko ir paviršinių krūvių, kurie parodyti vieni tik pjūviuose C-C ir 2-2 laiko momentu $t_2 = T/4$. Jie skerspjūvyje C-C yra tokie pat, kaip bangolaidžio skerspjūvyje B-B, tačiau pastarajame parodyti kartu su magnetinio lauko linijomis. Elektrinio lauko linijos rezonatoriaus pjūviuose C-C, 2-2 yra tokios pat ir tose pačiose vietose, kaip buvo slinkties srovės linijos pjūviuose A-A, 1-1 magnetinio lauko žiedų viduryje, kai tuo tarpu bangolaidyje būna jų pakraščiuose. H_{101} bangos atveju nubraižyti tik 5 gana paprasti rezonatoriaus pjūviai, nes bangos elektrinis laukas yra skersinis ir neturi išilginių komponentių. 5.7 pav. žadinimo strypelis įvestas ne stačiakampio rezonatoriaus gale, kaip nurodyta, o plačiosios sienelės viduryje, kur yra didžiausias elektrinio lauko stipris. Tai netinka perderinamo ilgio rezonatoriams, kurių lauką stumia stūmoklis, bet žadinimo strypelis lieka vietoje. Be to, strypelis riboja stūmoklio eigą ir rezonatoriaus perderinimo galimybes. Deja, žadinant H_{101} bangą strypeliu, kitos išeities nėra. Sėkmingai žadinti šią bangą gali pagal užduotį rezonatoriaus gale išdėstyti kilpa arba plyšys.

E_{11} ir E_{111} bangų elektrinio lauko braižymo metodikos bei išilginės E_z komponentės (+) 5.2, 5.8 pav. skerspjūviuose A-A yra visiškai vienodos. Tik bangolaidžio skerspjūvyje padarytas horizontalus, o rezonatoriaus – vertikalus išilginiai pjūviai 1-1. Juose elektriniai laukai neesminiai skiriasi dėl skirtingų pusbangių $\lambda_b/2$ ilgių ir plačiosios bei siaurosios sienelių pločių. Rezonatoriaus pjūvyje 1-1 elektrinio lauko linijos yra statmenos galinėms plokštelėms, ant kurių kaupiasi paviršiniai krūviai. Plokštelių ir krūvių nėra bangolaidyje. Be to, nerodoma bangos sklidimo krypties ašis z bei fazinio greičio vektorius $\mathbf{v}_{fb}$. Skerspjūviuose B-B elektrinio lauko linijos ir paviršiniai krūviai nesiskiria. Bet jokiuose rezonatoriaus pjūviuose laiko momentu $t_1 = 0$ nėra magnetinių laukų ir slinkties bei paviršinių laidžio srovių, kurie parodyti tik laiko momentu $t_2 = -T/4$. Skersinis magnetinis laukas ir slinkties srovė skerspjūvyje C-C yra tokie pat, kaip bangolaidžio skerspjūvyje B-B, tačiau priešingų kryptį dėl statmenai išdėstytų išilginių pjūvių bei žiūrėjimo kryptį. Magnetinio lauko žiedai susidaro aplink slinkties ir paviršinę laidžio srovės bei išsidėsto rezonatoriaus galuose prie laidžių plokštelių lygiagrečiai joms. Slinkties srovių linijos rezonatoriaus pjūviuose C-C, 2-2 yra tokios pat ir tose pačiose vietose, kaip buvo elektrinio lauko linijos pjūviuose A-A, 1-1. Rezonatoriaus skerspjūvyje C-C parodytos paviršinės laidžio srovės komponentės galinėje plokštelėje. E_{111} bangos atveju nubraižyti visi 6, bet gana paprasti rezonatoriaus pjūviai, nes bangos slinkties srovė turi skersines komponentes, kurioms parodyti reikia pjūvių 2-2 ir D-D.

5.8 pav. žadinimo strypelis įvestas stačiakampio rezonatoriaus gale, kaip nurodyta, galinės plokštelės viduryje, kur yra didžiausias elektrinio lauko stipris. Toks strypelis neriboja stūmoklio eigos ir rezonatoriaus perdarinimo galimybių. Sėkmingai žadinti E_{111} bangą gali ir pagal užduotį rezonatoriaus gale išdėstyti kilpa arba plyšys.

Rezonatoriuje visi žadinimo elementai rodomi dviem laiko momentais, neatsižvelgiant į tai, žadina jie ar ne. Tai yra rezonatoriaus konstrukcijos elementai, kurie negali vienu momentu egzistuoti, o kitu – išnykti.

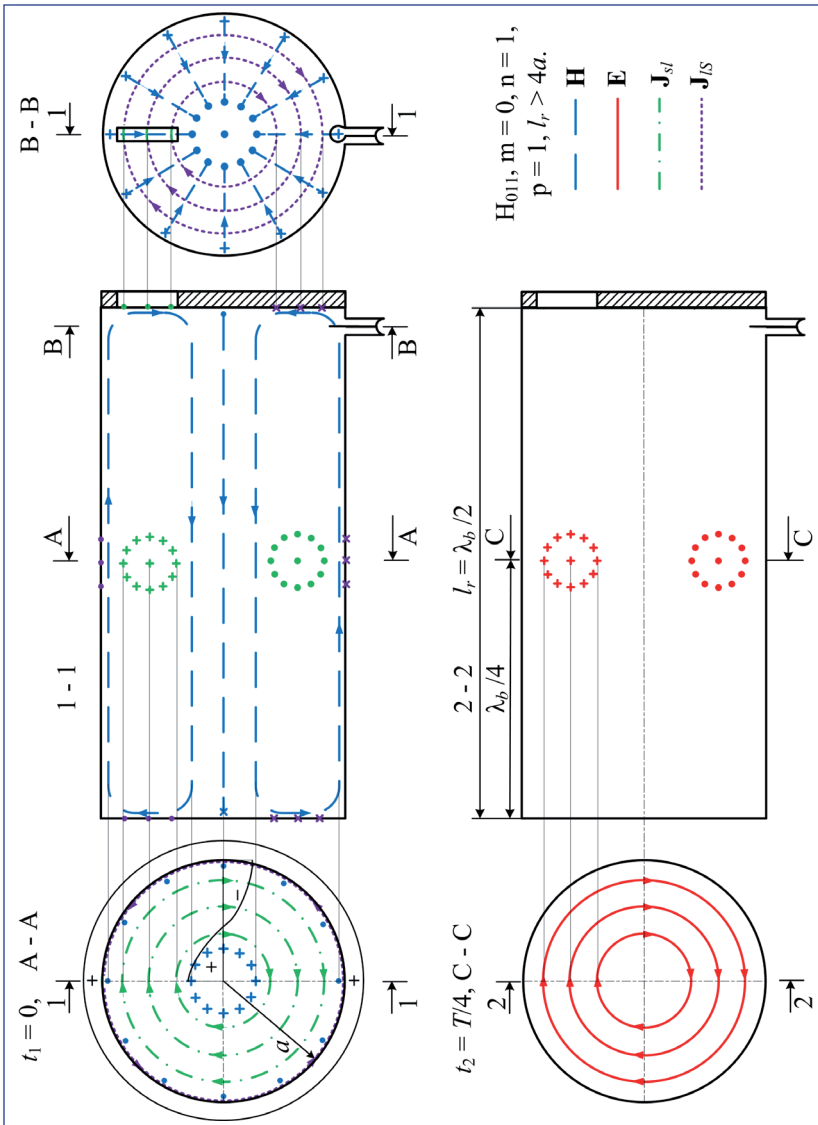
Todėl būna jų vaizdų perteklius. Bangolaidyje pakanka kiekvieną žadinimo elementą parodyti dviejuose pjūviuose ir jo vieta yra aiški.

5.8. Nubraižykite H_{011} (H_{111}) bangos, žadinamos strypeliu, kilpa arba plyšiu apskritame bangolaidiniame rezonatoriuje ($r=a$, $l_r > 4a$, žadinama gale) EM lauko vektorių E , J_{sl} , H , J_{ls} linijas ir paviršinius krūvius q_s . Aptarkite žadinimo būdo parinkimą.

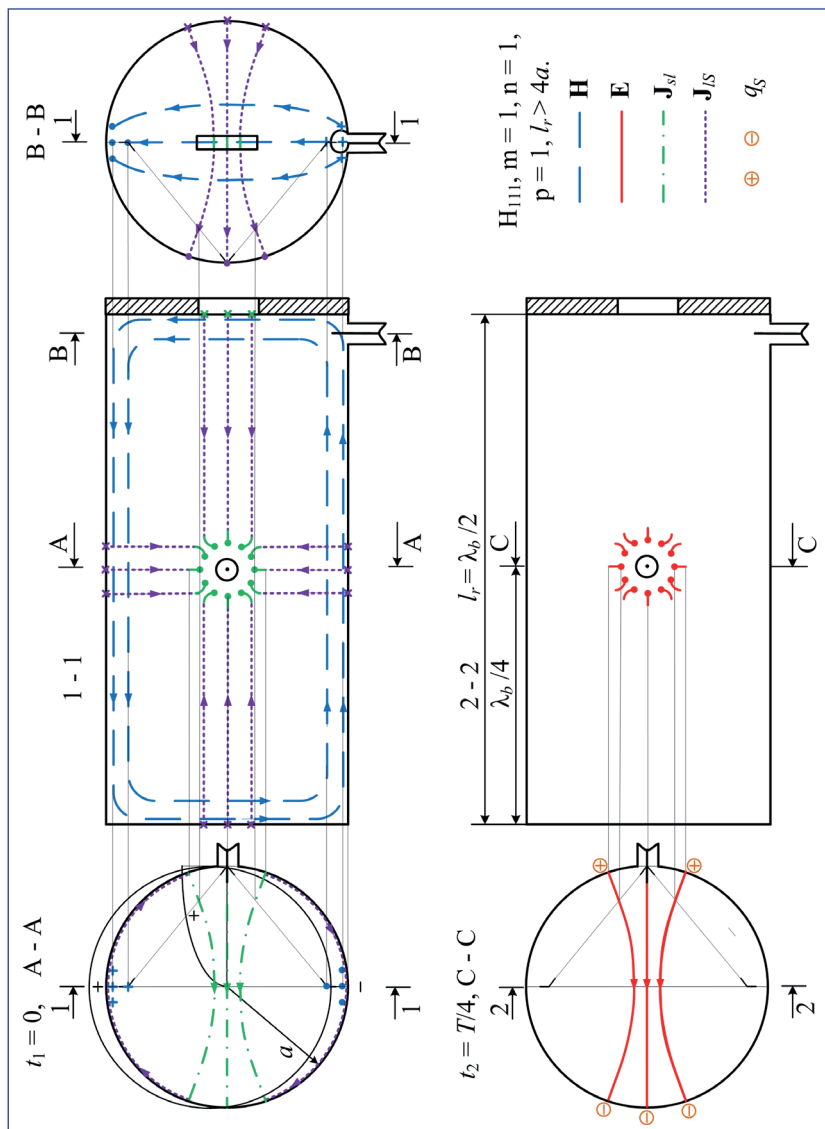
Sprendimas pateiktas 5.9 (5.10) pav. Pradžiai priminsime, kad H_{011} bangos EM laukas metaliniame apskritame bangolaidyje jau buvo pavaizduotas 5.5 pav. Gana detalai aprašyta to lauko braižymo metodika. Ši užduotis skiriasi tuo, kad reikia nubraižyti faktiškai tos pačios bangos H_{011} , bet su trečiu indeksu $p=1$, lauką apskritame rezonatoriuje. Bangolaidis skiriasi nuo rezonatoriaus ilgiu: $l_b = \infty$, o $l_r = p\lambda_b/2 = 1 \cdot \lambda_b/2 = \lambda_b/2 > 2a$.

Vietoje trijų bangolaidžio pjūvių (5.5 pav.) reikia paruošti 5 rezonatoriaus pjūvius (5.9 pav.) dviem skirtingiems laiko momentams $t_1 = 0$ ir $t_2 = T/4$. Po to apriboti galinėmis plokštelėmis ir nurodyti išilginių pjūvių 1-1, 2-2 ilgi.

H_{01} ir H_{011} bangų magnetinių laukų, slinkties bei laidžio srovių braižymo metodikos ir linijos 5.5, 5.9 pav. skerspjūviuose A-A yra visiškai vienodos. Tik bangolaidžio skerspjūvyje padarytas horizontalus, o rezonatoriaus – vertikalus išilginiai pjūviai 1-1. Juose magnetinio lauko, slinkties bei laidžio srovių linijos šiek tiek skiriasi dėl skirtingų pusbangių $\lambda_b/2$ ilgių ir kitokio žadinimo elementų išdėstymo. Rezonatoriaus pjūvyje 1-1 magnetinio lauko linijos yra lygiagretės sienelėms ir galinėms plokštelėms, kuriose teka paviršinės laidžio srovės. Plokštelių ir srovių jose nėra bangolaidyje. Be to, rezonatoriuje nerodoma ašis z bei fazinio greičio vektorius v_{fb} , nes banga nesklanda. Skerspjūviuose B-B skiriasi išilginių magnetinio lauko komponentių H_z kryptys dėl priešingų žiūrėjimo krypčių bangolaidžio ir rezonatoriaus išilginiuose pjūviuose 1-1. Rezonatoriaus skerspjūvyje B-B parodyta žiedinė laidžio srovė galinėje plokštelėje. Bet jokiuose pjūviuose laiko momentu $t_1 = 0$ nėra elektrinio lauko, kuris parodytas vienas tik pjūviuose C-C ir 2-2 laiko momentu $t_2 = T/4$.



5.9 pav. H_{011} bangos EM laukas apskritame bangolaidiniame rezonatoriuje, žadinamame strypeliu, kilpa arba plyšiu



5.10 pav. H_{111} bangos EM laukas apskritame bangolaidiniame rezonatoriuje, žadinamame strypeliu, kilpa arba plyšiu

Jis rezonatoriaus skerspjūvyje C-C yra toks pat, kaip bangolaidžio skerspjūvyje B-B, tačiau pastarajame parodytas kartu su magnetinio lauko linijomis. Elektrinio lauko linijos rezonatoriaus pjūviuose C-C, 2-2 yra tokios pat ir tose pačiose vietose, kur buvo slinkties srovės linijos pjūviuose A-A, 1-1 magnetinio lauko žiedų viduryje, kai tuo tarpu bangolaidyje būna jų pakraščiuose. H_{011} bangos atveju nubraižyti tik 5 gana paprasti rezonatoriaus pjūviai, nes bangos elektrinis laukas yra skersinis ir neturi išilginių komponentų. 5.9 pav. negalima įtaisyti strypelio H_{011} bangai žadinti. Jos elektrinis laukas užsidaro žiedais apskrito rezonatoriaus vidurio pjūvyje C-C ir nesiekia sienelių. Įvedus šiame pjūvyje per sienelę tiesų strypelį, jis kirs statmenai elektrinio lauko linijas, o turėtų būti išdėstytas išilgai jų pagal žadinimo sąlygas. Be to, strypelis pjūvyje C-C netenkina užduoties sąlygos žadinti bangą H_{011} rezonatoriaus gale. Tad šiuo atveju strypelis netaikomas. Blieka žadinti bangą kilpa ir plyšiu, parodytais rezonatoriaus gale, pjūviuose 1-1, 2-2 ir B-B.

Atliekant 5.5 užduotį buvo nustatyti pagrindinės bangos H_{11} duomenys metaliniame apskritame bangolaidyje. Čia reikia nubraižyti iš esmės tos pačios bangos H_{111} elektromagnetinį lauką apskritame bangolaidiniame rezonatoriuje. Todėl verta prisiminti, kad jau buvo braižytas pagrindinės bangos H_{101} laukas stačiakampiniame rezonatoriuje (5.7 pav). Į jį panašūs yra bangos H_{111} laukas (5.10 pav.) ir jo braižymo metodika. Spaudžiant stačiakampio rezonatoriaus išilgines briaunas ir keičiant jį į apskritą bangolaidį, bangos H_{101} laukas keičiasi į bangos H_{111} lauką. Tai naudojama bangolaidinėse perėjose iš stačiakampio bangolaidžio į apskritą ir atvirkščiai [12].

Braižant H_{111} bangos EM lauką, reikia pradžioje paruošti 5 rezonatoriaus pjūvius (5.10 pav.) dviem skirtingiems laiko momentams $t_1 = 0$ ir $t_2 = T/4$. Po to apriboti galinėmis plokštelėmis ir nurodyti išilginių pjūvių 1-1, 2-2 ilgį $l_r = p\lambda_b/2 = 1 \cdot \lambda_b/2 = \lambda_b/2 > 2a$.

H_{111} bangos indeksas $m = 1$, todėl 5.10 pav. skerspjūvyje A-A, pradedant nuo viršaus, išilgai perimetro braižoma pagal $\cos l\varphi$ funkciją kintanti viena stovinčioji banga H_z komponentėms. Čia viršutinis SB pusbangis

yra rezonatoriaus išorėje ir laikomas teigiamuoju (+), o apatinis viduje ir žymimas neigiamuoju (–). Po to skerspjūvyje A-A nuo centro ant horizontalios ašies braižoma pirmosios eilės Beselio funkcija J_1 iki pirmojo ekstremumo ($n = 1$) ant rezonatoriaus sienelės. Pažymimas esantis virš ašies teigiamasis (+) SB ketvirtis. Ant sienelės gaunamas vieno H_z pusbangio pūpsnis.

Sudauginus H_{111} bangos (5.10 pav.) pasiskirstymo išilgai perimetro funkcijos $\cos 1\varphi$ teigiamąją (+) dalį iš pirmosios eilės Beselio funkcijos J_1 teigiamojo (+) SB ketvirčio atveju, braižomos rezonatoriaus viršuje prie pat sienelės nueinančios (+) H_z komponentės. Centre Beselio funkcija prasideda nuo 0, todėl skerspjūvio A-A viduryje H_z komponentių nėra. Sudauginus pasiskirstymo išilgai perimetro funkcijos $\cos 1\varphi$ neigiamąją (–) dalį iš pirmosios eilės Beselio funkcijos J_1 teigiamojo (+) SB ketvirčio atveju, braižomas toks pat, kaip ir nueinančių, rezonatoriaus apačioje prie pat sienelės ateinančių (–) H_z komponentių skaičius. Nueinančios ir ateinančios H_z komponentės sudaro su skersinėmis H_s komponentėmis (skerspjūvis B-B) vieno pusbangio ilgio ($p = 1$) magnetinio lauko žiedus, braižomus lygiagrečiai rezonatoriaus sienelėms ir galinėms plokštelėms išilginiame pjūvyje 1-1. Šių žiedų viduryje braižomi nueinančių slinkties srovių tankio vektorių $\mathbf{J}_{sl}$ taškai. Slinkties srovė tiesiai arba lankais teka rezonatoriaus dielektrike ir statmenai pereina į paviršines laidžio srovės sienelėse bei galinėse plokštelėse. Magnetinio lauko žiedų ir joms statmenų slinkties bei laidžio srovių kryptys susietos dešiniojo kumščio taisykle. Norint maksimaliai parodyti magnetinio lauko, slinkties ir laidžio srovių linijas, reikia skerspjūviuose A-A ir B-B daryti laužtus išilginius pjūvius 1-1. Bet jokiuose pjūviuose laiko momentu $t_1 = 0$ nėra elektrinio lauko.

Elektrinis laukas rodomas su krūviais tik pjūvyje C-C ir vienas pjūvyje 2-2 laiko momentu $t_2 = T/4$. Jo linijos rezonatoriaus pjūviuose C-C, 2-2 turi būti tokios pat ir tose pačiose vietose, kur buvo slinkties srovės linijos pjūviuose A-A, 1-1 magnetinio lauko žiedų viduryje. H_{111} bangos atveju braižomi tik 5 gana paprasti rezonatoriaus pjūviai, nes bangos elektrinis laukas yra skersinis ir neturi išilginių komponentių. 5.10 pav. žadinimo

strypelis įvestas ne apskrito rezonatoriaus gale, kaip nurodyta, o sienelės viduryje, kur yra didžiausias elektrinio lauko stipris. Tai netinka perduodamo ilgio rezonatoriams, kurių lauką stumia stūmoklis, bet žadinimo strypelis lieka vietoje. Be to, strypelis riboja stūmoklio eigą ir rezonatoriaus perduodimo galimybes. Deja, žadinant H_{111} bangą strypeliu, kitos išėjties nėra. Belieka žadinti bangą kilpa ir plyšiu, parodytais rezonatoriaus gale, pjūviuose 1-1, 2-2 ir B-B.

Čia išnagrinėjome žemiausių H_{101} ir E_{111} tipų bangų stačiakampiuose bei H_{011} ir H_{111} bangų apskrituose rezonatoriuose EM laukus, kai $p=1$. Supratus jų sandaros principus, galima aukštesnių H_{mn1} ir E_{mn1} tipų bangų stačiakampiuose rezonatoriuose laukus braižyti pagal gana paprastas 5.4 pav. schemas. Deja, šių tipų bangų apskrituose rezonatoriuose laukus teks braižyti pagal sudėtingesnes 5.3 pav. schemas. Kai $p > 1$, galima taikyti paprastą EM laukų rezonatoriuose braižymo schemą (5.11 pav.).

$$H_{mn1}, E_{mn1} \xrightarrow{\times p} H_{mnp}, E_{mnp}$$

5.11 pav. EM laukų rezonatoriuose braižymo schema

Tik vėlgi reikia, pereinant nuo vieno elementaraus lauko prie gretimo, pakeisti EM laukų linijų kryptis taip, kad gretimos linijos būtų vienos krypties, o tolimesnės – priešingų kryptių [12].

Didelis skaičius tipinių užduočių braižyti EM laukus metaliniuose stačiakampiuose ir apskrituose bangolaidžiuose bei bangolaidiniuose rezonatoriuose pateiktas 1.2 priede.

6. ELEKTROMAGNETINIAI LAUKAI ATVIRUOSE APSKRITUOSE BANGOLAIDŽIUOSE

Teorinė dalis

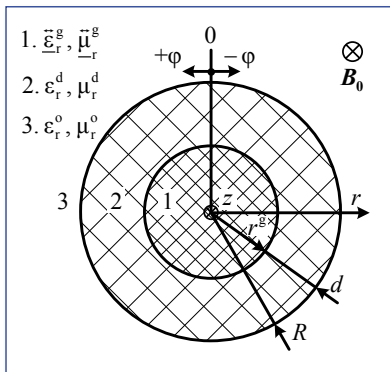
Atviri apskriti dielektriniai ir girotropiniai bangolaidžiai yra naudojami elektromagnetinių (EM) mikrobangų, optiniai bangolaidžiai – infraraudonųjų spindulių (IR) diapazonuose. Jie išsiskiria plačiajuostiškumu, nesudėtinga gamyba [10]. Bet šių bangolaidžių taikymą ypač aukštųjų dažnių (YAD) poliarizatoriuose, dažnio ir fazės keitikliuose bei modulatoriuose, optinėse linijose riboja tai, kad EM laukai juose yra nepakankamai ištirti.

Šio skyriaus tikslas – padėti metodiškai įsisavinti originalią programą MATLAB® terpėje ir programų paketą CST *Microwave Studio* 10 laukams atviruose apskrituose dielektriniuose, optiniuose ir girotropiniuose bangolaidžiuose modeliuoti. Norint apskaičiuoti jų EM laukų komponentes, reikia rasti bangų dispersinių lygčių sprendinius [6]. Juos įstatyti į komponentių išraiškas ir apskaičiuoti laukų stiprio pasiskirstymo bangolaidžiuose funkcijas. Po to pavaizduoti laukus dvimatėje (2D) arba (ir) trimatėje (3D) erdvėje [5].

Dielektriniai, optiniai ir girotropiniai bangolaidžiai priklauso tai pačiai atvirų dielektrinių bangolaidžių klasei. Jie gaminami iš vienalyčių arba sluoksniuotų izotropinių dielektrikų, puslaidininkių, feritų. Pastarieji, išilgai veikiami pastoviojo magnetinio lauko, dirbtinai tampa anizotropinėmis (girotropinėmis) terpėmis. Izotropinės ir anizotropinės terpės nagrinėtos 2 skyriuje. EM bangų sąveika su girotropinėmis terpėmis sukelia Faradėjaus efektą, ciklotroninį (giroelektriniuose puslaidininkiuose) ir giromagnetinį (giromagnetiniuose ferituose) rezonansus [12].

Bendrasis elektrodinaminis atvirų apskritų dielektrinių, vienalyčių optinių ir girotropinių bangolaidžių modelis pateiktas 6.1 pav. [10].

Jis sudarytas sudėtingiausiems girotropiniams bangolaidžiams ir apima visus čia minėtus bangolaidžius. Modelyje girotropiją, sukeltą puslaidininkinių ir feritinių bangolaidžių šerdyse (1 sritis), pridėjus pastovųjį išilginį magnetinį srautą, kurio tankis B_0 , įvertina dielektrinės ir magnetinės skvarbų tenzoriai $\underline{\underline{\epsilon}}_r^g, \underline{\underline{\mu}}_r^g$. Kai $B_0 = 0$, puslaidininkiniai ir feritiniai bangolaidžiai yra izotropiniai z, φ koordinačių bei anizotropiniai spindulio r kryptimis dėl kelių modelio sričių su skirtingais duomenimis. 1 sritis gali būti izotropinė nemagnetinio dielektriko arba vienalyčio optinio bangolaidžio šerdis. Ji, neįvertinant nuostolių, apibūdinama realiosiomis santykinėmis dielektrine ϵ_r^s ir magnetine $\mu_r^s = 1$ skvarbomis.



6.1 pav. Bendrasis elektrodinaminis atvirų apskritų dielektrinių, vienalyčių optinių ir girotropinių bangolaidžių modelis

Modelio 2 sritis – išorinis nemagnetinio dielektriko sluoksnis su realiosiomis santykinėmis dielektrine ϵ_r^d ir magnetine $\mu_r^d = 1$ skvarbomis, kai neįvertinami nuostoliai dielektrike. Tai gali būti optinio bangolaidžio apvaskalas arba girotropinio bangolaidžio sutvirtinimo sluoksnis.

Modelio 3 sritis – oras, kurio skvarbos yra $\epsilon_r^o = \mu_r^o \approx 1$.

Toliau pateikiama bendrojo matematinio dielektrinių, vienalyčių optinių ir girotropinių bangolaidžių modelio dalis [10].

Girotropinių šerdžių santykinų dielektrinės ir magnetinės skvarbų tenzoriai užrašomi (žr. 2 skyriaus (2.2), (2.3) lenteles) lentelėmis:

$$\underline{\tilde{\epsilon}}_r^g = \begin{vmatrix} \underline{\epsilon}_{xx}^g & j\underline{\epsilon}_{xy}^g & 0 \\ -j\underline{\epsilon}_{xy}^g & \underline{\epsilon}_{xx}^g & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\epsilon}_{zz}^g \end{vmatrix}, \quad (6.1)$$

$$\underline{\tilde{\mu}}_r^g = \begin{vmatrix} \underline{\mu}_{xx}^g & j\underline{\mu}_{xy}^g & 0 \\ -j\underline{\mu}_{xy}^g & \underline{\mu}_{xx}^g & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\mu}_{zz}^g \end{vmatrix}. \quad (6.2)$$

Apie sklindančių bangų tipus sprendžiama pagal EM laukų išilginių komponentių pasiskirstymą bangolaidžių skerspjuvniuose. Elektrinių ir magnetinių laukų stiprio išilginės komponentės 6.1 pav. modelio girotropinėse šerdyse skaičiuojamos pagal formules:

$$\underline{E}_z^g = \left[\underline{a} \underline{A}_1 J_m(\underline{k}_{\perp 1}^g r) + \underline{B}_1 J_m(\underline{k}_{\perp 2}^g r) \right] e^{\pm j m \varphi}, \quad (6.3)$$

$$\underline{H}_z^g = \left[\underline{A}_1 J_m(\underline{k}_{\perp 1}^g r) + \underline{b} \underline{B}_1 J_m(\underline{k}_{\perp 2}^g r) \right] e^{\pm j m \varphi}, \quad (6.4)$$

čia $\underline{a}$, $\underline{b}$ – nežinomi E ir H tipų bangų sąsajos hibridinėse bangolaidžių bangose $\underline{E}_{Hmn}$, $\underline{H}_{Emn}$ koeficientai; $\underline{A}_1$, $\underline{B}_1$ – nežinomi EM bangų amplitudžių koeficientai; $J_m(\underline{k}_{\perp 1,2}^g r)$ – Beselio m -osios eilės specialiosios cilindrinės funkcijos su argumentais $\underline{k}_{\perp 1}^g r$, $\underline{k}_{\perp 2}^g r$ – pirmuoju ir antruoju bangų šerdyse sklidimo koeficientais, normuotais pagal spindulį r ; $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ – hibridinių bangų azimutinio periodiškumo indeksas, nurodantis stovinčiųjų bangų (SB) skaičių bangolaidžių perimetruose pagal azimutinę φ koordinatę; $\pm$ ženklai e laipsnio rodiklyje reiškia kairiosios ($e^{+j m \varphi}$) ir dešinėsios ($e^{-j m \varphi}$) apskritiminės poliarizacijos bangas šerdyse.

Modelio 2 srityje – išorinio dielektriko sluoksnyje išilgines EM lauko komponentes aprašo išraiškos:

$$\underline{E}_z^d = \left[\underline{B}_2 J_m(\underline{k}_{\perp}^d r) + \underline{C}_2 N_m(\underline{k}_{\perp}^d r) \right] e^{\pm j m \varphi}, \quad (6.5)$$

$$\underline{H}_z^d = \left[\underline{A}_2 J_m(\underline{k}_\perp^d r) + \underline{D}_2 N_m(\underline{k}_\perp^d r) \right] e^{\pm j m \varphi}, \quad (6.6)$$

čia $\underline{A}_2, \underline{B}_2, \underline{C}_2, \underline{D}_2$ – nežinomi EM bangų amplitudžių koeficientai; $J_m(\underline{k}_\perp^d r)$ – Beselio ir $N_m(\underline{k}_\perp^d r)$ – Neumano m -osios eilės funkcijos su argumentu $\underline{k}_\perp^d r$ – bangų dielektrike sklaidimo koeficientu.

Modelio 3 srityje – ore, išilginės EM laukų stiprio komponentės randamos pagal formules:

$$\underline{E}_z^o = \underline{B}_3 H_m^{(2)}(\underline{k}_\perp^o r) e^{\pm j m \varphi}, \quad (6.7)$$

$$\underline{H}_z^o = \underline{A}_3 H_m^{(2)}(\underline{k}_\perp^o r) e^{\pm j m \varphi}, \quad (6.8)$$

čia $\underline{A}_3, \underline{B}_3$ – nežinomi bangų amplitudžių koeficientai; $H_m^{(2)}(\underline{k}_\perp^o r)$ – Hankelio 2-osios rūšies m -osios eilės specialioji cilindrinė funkcija su argumentu $\underline{k}_\perp^o r$ – bangų ore normuotuoju sklaidimo koeficientu.

Nežinomi bangų sąsajos ir amplitudžių koeficientai randami iš pradinų ir žadinimo sąlygų, kurias reikia nustatyti. EM laukų stiprio skersinės komponentės $\underline{E}_s, \underline{H}_s$ skaičiuojamos taikant ryšio su išilginėmis komponentėmis lygtis [10], į kurias įeina tenzorių (6.1), (6.2) sandų išraiškos. Skersinės komponentės porose $\underline{E}_r, \underline{H}_\varphi$ ir $\underline{E}_\varphi, \underline{H}_r$ susietos tarpusavyje bangine varža, kuri yra skirtinga įvairių bangolaidžių skirtingų tipų bangoms ir priklauso nuo dažnio [12]. Hibridinės bangos optiniuose bangolaidžiuose nurodomos žymenimis LP_{mn} pagal galios srauto tankio – Pointingo vektoriaus modulio $|\Pi|$ pasiskirstymą skerspjūvyje. Indeksas m nurodo $|\Pi|$ maksimumų, tenkančių pusei bangolaidžio perimetro, skaičių. Indeksas n reiškia tokių maksimumų išilgai spindulio r skaičių. Galios srauto tankis $|\Pi| = |\mathbf{E}_s^\Sigma \times \mathbf{H}_s^\Sigma|$ yra maksimalus ten, kur yra stipriausių suminių EM laukų skersiniai vektoriai $\mathbf{E}_s^\Sigma, \mathbf{H}_s^\Sigma$.

6.1. Laukų modeliavimas programa MATLAB® terpėje

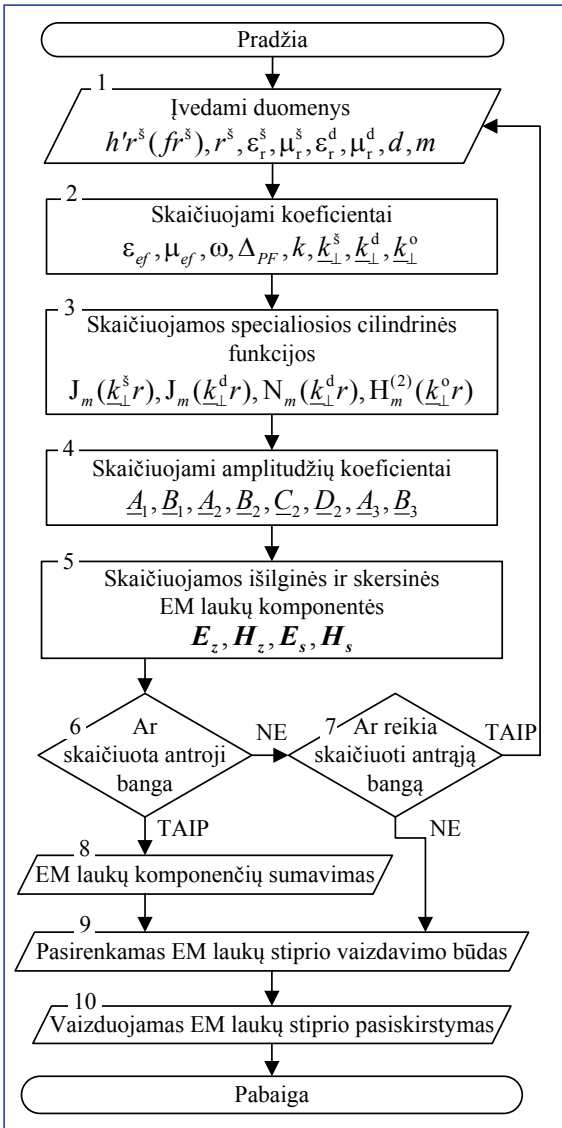
T. Sledevič sukūrė kelias originalias bendrąsias programas MATLAB® terpėje EM laukams dielektriniuose, vienalyčiuose optiniuose ir grotropiniuose bangolaidžiuose modeliuoti. Išilginių komponentių laukams tirti skirta programa leido atpažinti bangų tipus, patikrinti jų laukų modeliavimo principus, įsitikinti jų teisingumu [5]. Kita programa skirta EM laukų stiprio pasiskirstymui atvirose apskrituose dielektriniuose ir vienalyčiuose optiniuose bangolaidžiuose visapusiai tirti. Jos algoritmo (6.2 pav.) etapai yra:

1. Įvedami transcendentinių dispersinių lygčių sprendiniai $h'r^s(fr^s)$ – bangų fazės koeficientų, normuotų pagal šerdies spindulį r^s , priklausomybės nuo normuotojo dažnio ir kt. duomenys.
2. Skaičiuojami reikalingi koeficientai [10].
3. Skaičiuojamos specialiosios cilindrinės funkcijos.
4. Skaičiuojami amplitudžių koeficientai.
5. Skaičiuojamos išilginės (6.3)–(6.8) ir skersinės EM laukų stiprio vektorių komponentės [10].
6. Tikrinama, ar skaičiuota antroji banga.
7. Pagal indeksus m ir n tikrinama, ar LP_{mn} tipo banga turi būti sumuojama iš dviejų bangų. Jeigu taip, skaičiuojamos antrosios bangos EM laukų stiprio vektorių komponentės.
8. Geometriškai sumuojami dviejų bangų EM laukų stiprio vektoriai ir gaunami jų sumos vektoriai:

$$\mathbf{E}_s^\Sigma = \mathbf{E}_{1s} + \mathbf{E}_{2s}, \quad \mathbf{H}_s^\Sigma = \mathbf{H}_{1s} + \mathbf{H}_{2s}. \quad (6.9)$$

9. Pasirenkamas EM laukų stiprio vaizdavimo būdas: spalvotais vieno nodo stiprio kontūrais, sritimis ar stiprio vektorių linijomis.

10. Vaizduojamas EM laukų stiprio pasiskirstymas dvimatėje (2D) srityje.



6.2 pav. Bendrasis algoritmas laukų stiprio pasiskirstymui dielektriniuose ir vienalyčiuose optiniuose bangolaidžiuose skaičiuoti

Metodikos nurodymai programos vartotojui

Čia pagal 6.3 pav. pateiktą vartotojo grafinės sąsajos langą nurodoma, kaip naudotis originalia programa MATLAB® terpėje.

1 numeriu pažymėtame lauke reikia pasirinkti 1 srities terpę. Į „r“ langelį įvesti jos spindulį milimetrais, į „eps“ – santykinę dielektrinę skvarbą. Jeigu pasirenkama giromagnetinė terpė, tai į „miu“ langelį įvedama jos santykinė magnetinė skvarba, o į „M/Ms“ langelį – terpės santykinis įmagnetėjimas. „A1“ ir „B1“ langeliuose nurodytos amplitudžių koeficientų reikšmės nekeičiamos.

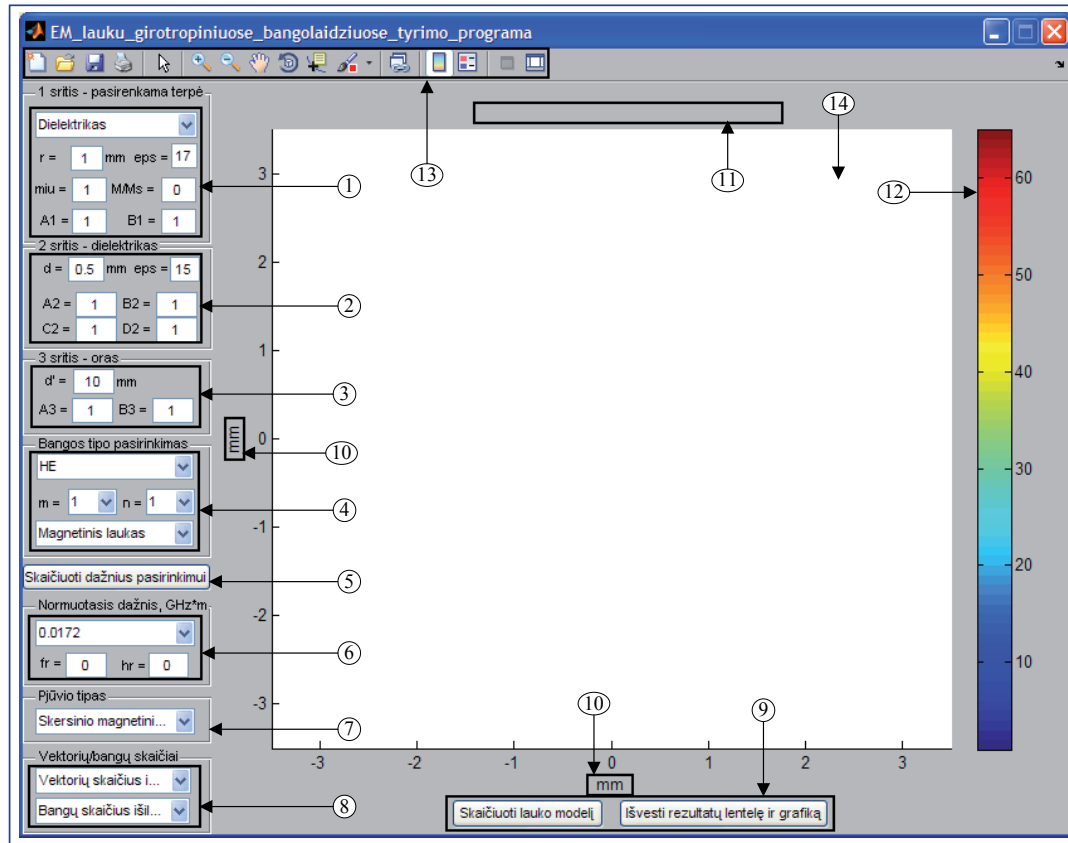
2 numeriu pažymėtame lauke reikia „d“ langelyje įvesti 2 srities dielektriko sluoksnio storį milimetrais ir „eps“ langelyje – santykinę dielektrinę skvarbą. „A2“, „B2“, „C2“ ir „D2“ langeliuose įvestos amplitudžių koeficientų reikšmės nekeičiamos.

3 numeriu pažymėtame lauke reikia „d“ langelyje įvesti oro sluoksnio storį milimetrais. „A3“, „B3“ langeliuose nurodytos amplitudžių koeficientų reikšmės nekeičiamos.

4 numeriu pažymėtame lauke reikia pasirinkti bangos tipą, „m“ ir „n“ langeliuose įvesti pirmąjį ir antrąjį bangos tipo indeksus. Vaizduoti pasirenkamas „Magnetinis laukas“ arba „Elektrinis laukas“.

Paspaudžiamas 5 numeriu pažymėtas „Skaičiuoti dažnius pasirinkimui“ mygtukas ir 6 numeriu pažymėtame lauke pasirenkamas normuotasis dažnis GHz·m, o žemiau esančiuose „fr“ ir „hr“ langeliuose įrašyti 0 nekeičiami. Norint pačiam įvesti normuotuosius dažnį ir bangos fazės koeficientą, reikia įrašyti juos į „fr“ ir „hr“ langelius. Prioritetas bus taikomas įvestoms reikšmėms.

7 numeriu pažymėtame lauke reikia pasirinkti bangolaidžio pjūvio tipą. Jeigu pasirenkamas skersinis pjūvis ir EM lauko vaizdavimas vektoriais, tai 8 numeriu pažymėtame lauke reikia pasirinkti vektorių skaičių išilgai skersmens. Jeigu pasirenkamas išilginis pjūvis, tai 8 numeriu pažymėtame lauke reikia pasirinkti bangų skaičių išilginiame pjūvyje.



6.3 pav. Programos MATLAB® terpėje vartotojo grafinė sąsaja

Paspaudus 9 numeriu pažymėtame lauke esantį mygtuką „Skaičiuoti lauko modelį“, po kelių sekundžių 14 numeriu pažymėtame lauke pasirodys EM lauko modelis. Paspaudus 9 numeriu pažymėtame lauke esantį mygtuką „Išvesti rezultatų lentelę ir grafiką“, pateikiamas lauko stiprio priklausomybės nuo bangolaidžio spindulio grafikas, o rezultatų lentelė išsaugoma su pavadinimu „lentelė.xls“.

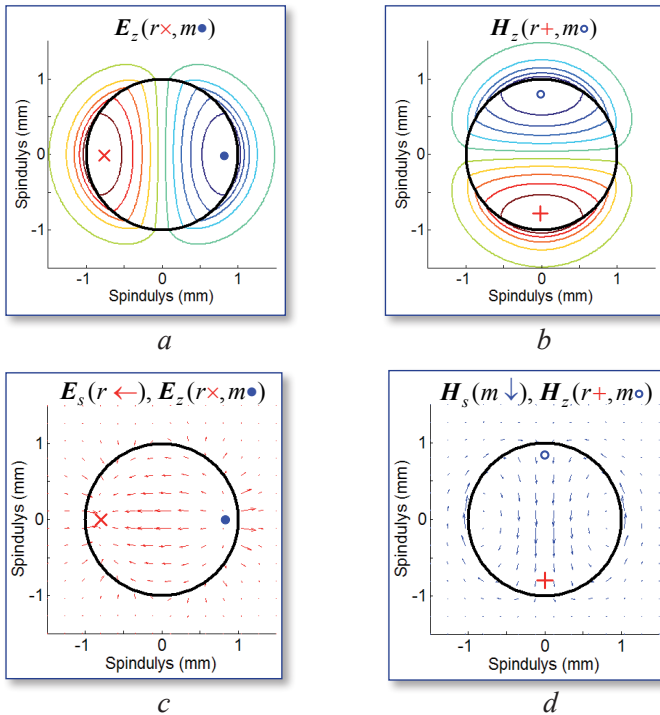
11 numeriu pažymėtame lauke išvedamas modelio pavadinimas. Dešinėje vartotojo grafinės sąsajos pusėje išvedama spalvota laukų stiprio amplitudžių skalė. Ją galima pašalinti, paspaudus 13 numeriu pažymėtoje įrankių juostoje esančią ketvirtąją iš dešinės pusės piktogramą.

Panaudojant 13 numeriu pažymėtoje įrankių juostoje esančias piktogramas, galima gauti EM lauko modelį išsaugoti, atspausdinti, padidinti, sumažinti, stumdyti ir pan.

Užduotys ir sprendimai

6.1. Programa MATLAB® terpėje gaukite pagrindinės bangos HE_{11} išilginių ir skersinių EM laukų pasiskirstymo modelius atviro apskrito dielektrinio bangolaidžio iš polikoro (Al_2O_3) šerdies, kurios $\epsilon_r^s = 9,6$, $r^s = 1$ mm, $d = 0$ mm, skerspjuvyje.

Sprendimas: 6.4 pav. pateikti pagrindinės hibridinės HE_{11} bangos EM laukų modeliai spalvotais vienodo stiprio kontūrais ir stiprio vektorių linijomis, kai $m = 1$, $n = 1$, $fr^s = 0,08$ GHz·m. Toliau visur raudonais (r) kryžiuokais ir mėlynais (m) taškais – elektriniame bei r plusais ir m apskritimais – magnetiniame laukuose pažymėta, kur yra nuo mūsų ir į mus nukreipti didžiausio stiprio išilginiai vektoriai, pereinantys į skersinius vektorius.

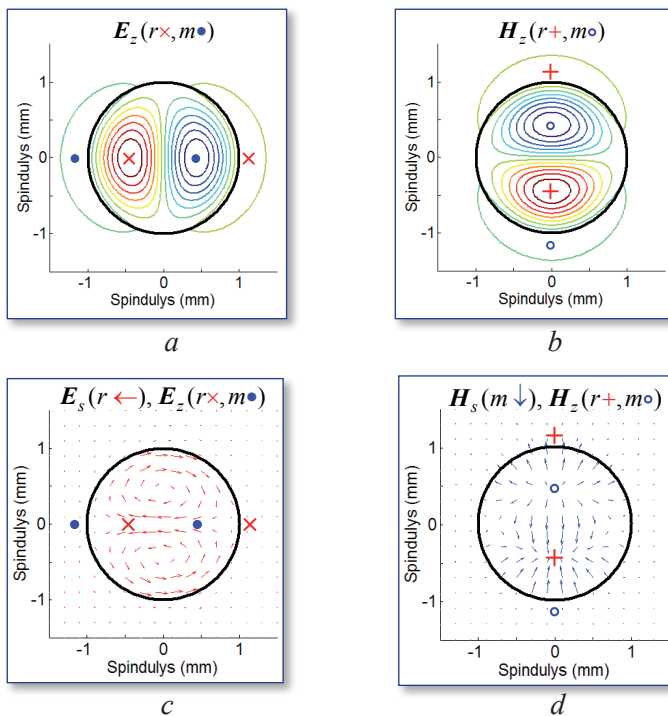


6.4 pav. Pagrindinio tipo bangos HE_{11} išilginių (a, b) ir skersinių (c, d) EM laukų dielektrinio bangolaidžio skerspjuvyje modeliai

Iš 6.4 pav. matoma, kad elektrinis ir magnetinis laukai turi išilgines bei skersines komponentes. Elektrinis laukas yra pasuktas 90° kampu magnetinio lauko atžvilgiu. EM laukas yra stipriausias dielektrinės šerdies kraštuose arti ribos su oro sluoksniu. Toks EM lauko pasiskirstymas būdingas pagrindinei HE_{11} tipo bangai [5, 6].

6.2. *Gaukite kaip ir 6.1, tik pirmajai aukštesniojo EH_{11} tipo bangai.*

Sprendimas: 6.5 pav. pateikti pirmosios aukštesniojo EH_{11} tipo bangos EM laukų pasiskirstymo modeliai polikore ir ore, kai $m=1, n=1$, normuotasis dažnis $fr^{\text{š}} = 0,08 \text{ GHz} \cdot \text{m}$.



6.5 pav. Pirmosios aukštesniojo EH_{11} tipo bangos išilginių (a, b) ir skersinių (c, d) EM laukų dielektrinio bangolaidžio skerspjūvyje modeliai

Iš 6.5 pav. *a, b* matoma, kad išilginiai elektrinis ir magnetinis laukai turi po du stiprio ekstremumus dielektrinėje šerdyje ir du gerokai silpnescius ekstremumus – oro sluoksnyje arti ribos su dielektriku. 6.5 pav. *c, d* pastebima, kad išilginiai EM laukai, pereidami į skersinius, užsidaro žiedais ne tik dielektrinėje šerdyje, bet ir paviršiniame oro sluoksnyje.

Be to, 6.4 pav. *d* skersinis magnetinis ir 6.5 pav. *c* skersinis elektrinis laukai ne tik pereina į išilginius laukus, bet ir užsidaro žiedais dielektrinio bangolaidžio skerspjūvyje.

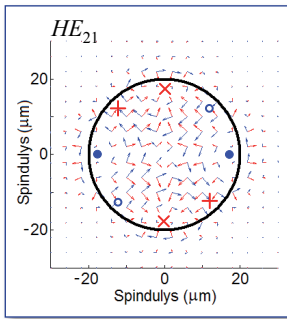
6.3. Programa MATLAB® terpėje gaukite pagrindinės LP_{01} ir aukštesniojo LP_{11} tipo bangų išilginių ir skersinių EM laukų pasiskirstymo modelius atviro apskrito optinio bangolaidžio iš kvarco (SiO_2) šerdies (skaidulos), kurios $\epsilon_r^s = 3,9$, $r^s = 20 \mu m$, $d = 0 \mu m$ skerspjūvyje.

Sprendimas: LP_{mn} tipo banga gaunama iš hibridinės bangos arba sumos hibridinės ir nulinio tipo, arba dviejų hibridinių bangų su apytikriai vienodais kriziniais dažniais [12]. Optiniuose bangolaidžiuose pagrindinė laikoma LP_{01} banga, atitinkanti pagrindinę HE_{11} bangą dielektriniuose bangolaidžiuose (6.4 pav.).

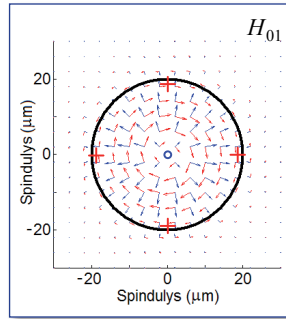
6.6 pav. parodytas aukštesniojo LP_{11} tipo bangos sudarymo principas. Ji gaunama geometriškai sumuojant HE_{21} (6.6 pav. *a*) ir H_{01} (6.6 pav. *b*) bangų EM laukų stiprio vektorių išilgines ir skersines komponentes [12]. Matoma, kad LP_{11} bangos suminės $\mathbf{E}_z^\Sigma$ komponentės koncentruojasi skaiduloje arti ribos su oro sluoksniu, o suminės $\mathbf{H}_z^\Sigma$ komponentės – skaidulos centre ir išoriniame oro sluoksnyje (6.6 pav. *c*).

6.6 pav. *d* parodytas bangos LP_{11} galios srauto tankio $|\Pi|$ pasiskirstymas optinio kvarco bangolaidžio skerspjūvyje. LP_{11} bangai yra būdingi du $|\Pi|$ maksimumai, kurie pažymėti raudonais (r) taškais. Jie reiškia, kad Pointingo vektoriai taškų aplinkoje yra nukreipti dviem srautais į mus.

$$\mathbf{E}_s(r \leftarrow), \mathbf{H}_s(m \downarrow), \mathbf{E}_z(r \times, m \bullet), \mathbf{H}_z(r +, m \circ)$$

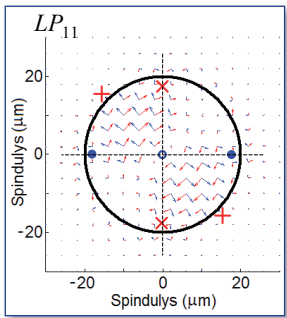


a

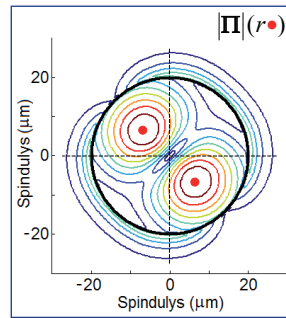


b

$$\mathbf{E}_s^\Sigma(r \leftarrow), \mathbf{H}_s^\Sigma(m \downarrow), \mathbf{E}_z^\Sigma(r \times, m \bullet), \mathbf{H}_z^\Sigma(r +, m \circ)$$



c



d

6.6 pav. Bangų HE_{21} (a), H_{01} (b), LP_{11} (c) išilginių ir skersinių EM laukų bei galios srauto tankio (d) optinio bangolaidžio skerspjūvyje modeliai

Pointingo vektoriai nurodo EM bangos sklidimo kryptį.

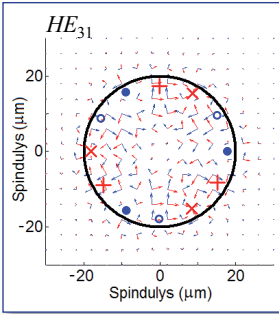
6.4. Gaukite kaip ir 6.3, tik aukštesniojo LP_{21} tipo bangai.

Sprendimas: 6.7 pav. pateiktas aukštesniojo LP_{21} tipo bangos sudarymo principas. Ji gaunama geometriškai sumuojant HE_{31} (6.7 pav. a) ir EH_{11} (6.7 pav. b) bangų EM laukų stiprio vektorių išilgines ir skersines

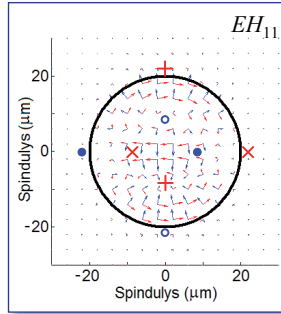
komponentes. Matoma, kad HE_{31} bangos išilginiai EM laukai koncentruojasi kvarco skaiduloje arti ribos su oro sluoksniu. EH_{11} bangos EM laukų pasiskirstymas jau buvo parodytas, bet detaliau ir kitaip 6.5 pav.

6.7 pav., *c* pastebima, kad LP_{21} bangos skersinės komponentės yra stipriausios skaidulos viršuje, viduryje ir apačioje. Tai matoma ir iš 6.7 pav. *d* pavaizduoto galios srauto tankio pasiskirstymo, kuriame pagal perimetrą yra r taškais pažymėti 4 maksimumai. Jie reiškia, kad EM banga sklinda į mus.

$$\mathbf{E}_s(r \leftarrow), \mathbf{H}_s(m \downarrow), \mathbf{E}_z(r \times, m \bullet), \mathbf{H}_z(r +, m \circ)$$

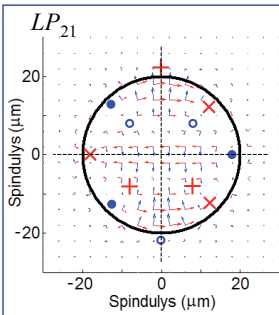


a

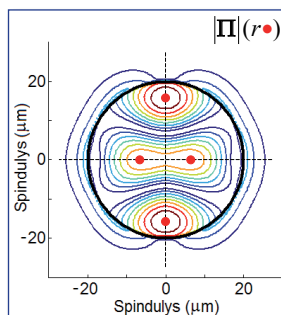


b

$$\mathbf{E}_s^{\Sigma}(r \leftarrow), \mathbf{H}_s^{\Sigma}(m \downarrow), \mathbf{E}_z^{\Sigma}(r \times, m \bullet), \mathbf{H}_z^{\Sigma}(r +, m \circ)$$



c



d

6.7 pav. Bangų HE_{31} (a), EH_{11} (b), LP_{21} (c) išilginių ir skersinių EM laukų bei galios srauto tankio (d) optinio bangolaidžio skerspjūvyje modeliai

6.6 ir 6.7 pav. *d* pastebima, kad nežymi galios srauto tankio dalis koncentruojasi išoriniame oro sluoksnyje arti ribos su optine skaidula. Tai patvirtina žinomą faktą, kad už dielektrinio ar vienalyčio optinio bangolaidžių ribų oru sklinda lėtoji paviršinė banga. 6.4–6.7 pav. matoma, kad $\mathbf{E}_z, \mathbf{E}_s, \mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s, \mathbf{H}_s, \mathbf{H}_z, \mathbf{E}_z^\Sigma, \mathbf{E}_s^\Sigma, \mathbf{E}_s^\Sigma, \mathbf{H}_s^\Sigma, \mathbf{H}_s^\Sigma, \mathbf{H}_z^\Sigma$ porų vektoriai yra statmeni tarpusavyje. Tai būdinga visų EM bangų laukams visuose bangolaidžiuose.

6.1–6.4 buvo probleminės tiriamojo pobūdžio užduotys ir sprendimai, gauti originalia programa MATLAB® terpėje. Be šios programos nepavyks atlikti tokių netipinių užduočių, todėl daugiau čia jų nepateikiama. Jas rekomenduojama specialiai formuluoti ir individualiai atlikti studentams, puikiai įsisavinusiems 5-ame ir 6-ame skyriuose pateiktas metaliuose bei dielektriniuose apskrituose bangolaidžiuose sklindančių EM laukų braižymo ir tyrimo metodikas.

6.2. Laukų modeliavimas programų paketu CST *Microwave Studio* 10

Metodikos nurodymai programų paketo vartotojui

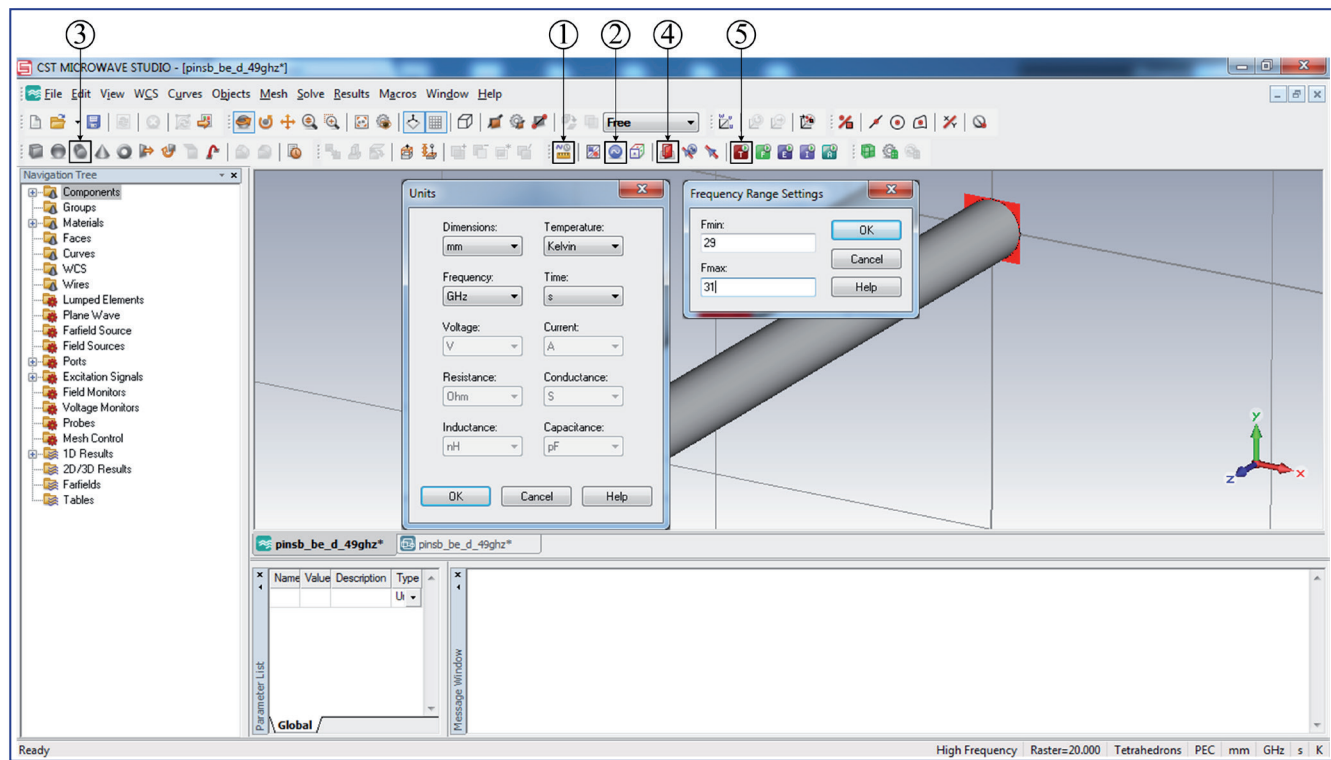
Paleidžiamas CST *Microwave Studio* 10 programų paketas. Atsidariusio lango (6.8 pav.) viršutinėje įrankių juostoje paspaudžiami mygtukai „File“ → „New“. Po to paspaudžiama 1 numeriu pažymėta piktograma ir naujai atsidariusio „Units“ lango laukeliuose pasirenkami: „Dimensions“ – mm, „Frequency“ – GHz, „Time“ – s.

Paspaudžiama 2 numeriu pažymėta piktograma ir naujai atsidariusiame „Frequency Range Settings“ lange į „ $F_{\min}$ “ ir „ $F_{\max}$ “ laukelius įrašomos tokios dažnių reikšmės gigahercais, kad jų aritmetinis vidurkis būtų lygus norimam dažniui. Pvz., jeigu EM laukai modeliuojami esant 30 GHz, tai $F_{\min} = 29$ GHz, $F_{\max} = 31$ GHz.

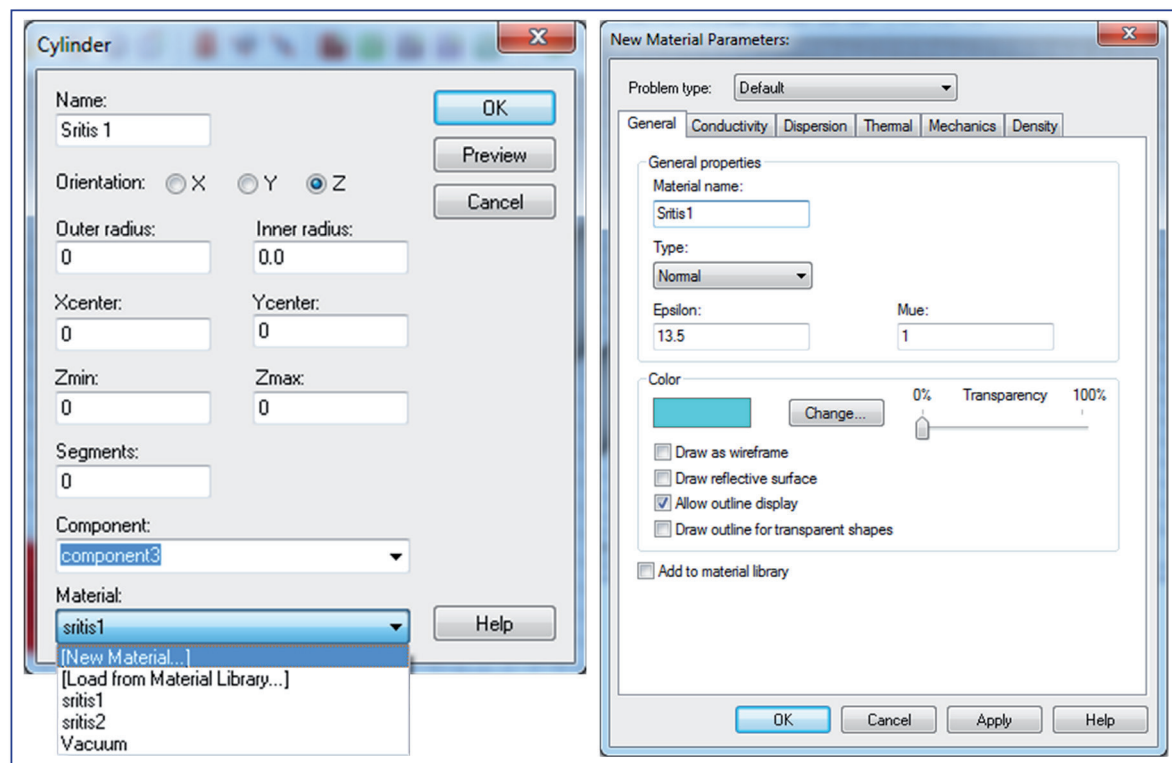
Paspaudžiama 3 numeriu pažymėta piktograma, po to „Esc“ mygtukas, esantis viršutiniame kairiajame klaviatūros kampe. Naujai atsidariusiame „Cylinder“ lange (6.9 pav.) į „Name“ laukelį įvedamas pavadinimas „Sritis 1“, į „Outer radius“ – 1 srities spindulys, į „ $Z_{\max}$ “ – bangolaidžio ilgis milimetrais.

„Material“ lauke pasirenkama parinktis „New Material“. Atsidariusiame „New Material Parameters“ lange, pateiktame 6.9 pav., į „Material name“ laukelį įrašomas pavadinimas „Sritis 1“, „Type“ laukelyje pasirenkama „Normal“ medžiaga. Jeigu žinomas dielektriko savitasis laidis, nuostolių kampo tangentes arba tankis, jie įvedami į „Conductivity“ ir „Density“ kortelėse esančius laukelius.

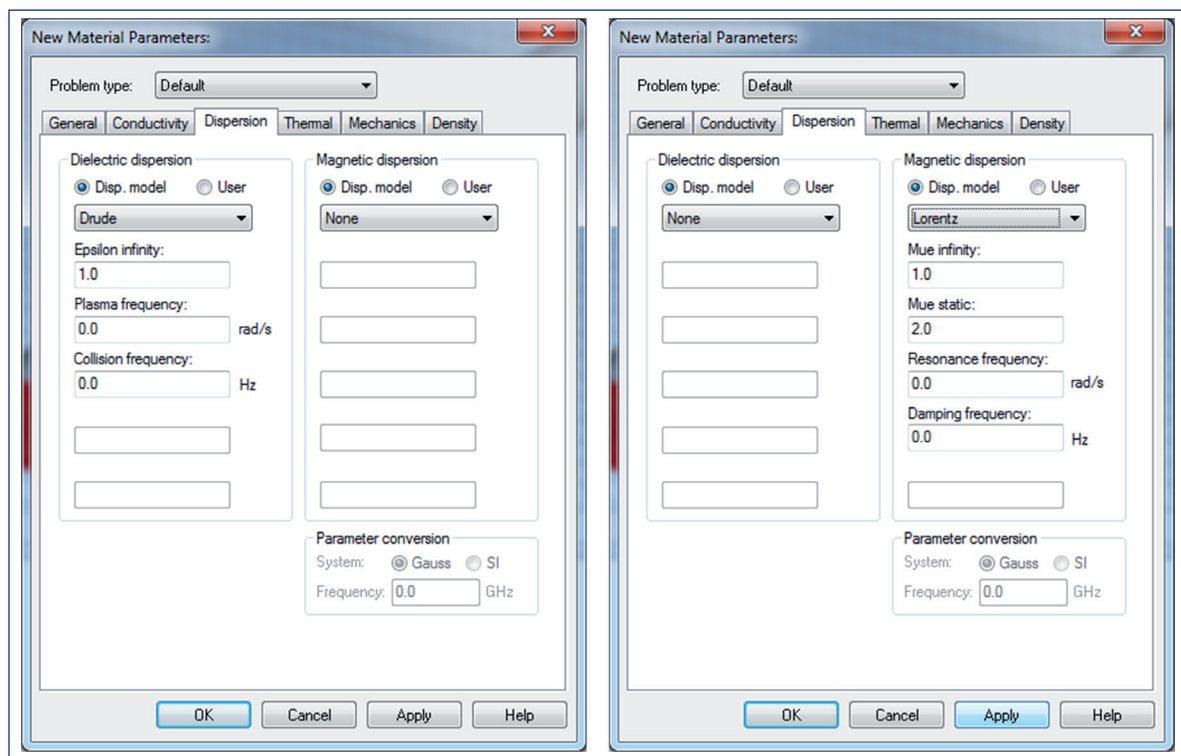
Kai modeliuojami laukai dielektriniuose bangolaidžiuose, 6.10 pav. pateikto „New Material Parameters“ lango „Epsilon infinity“ laukelyje įvedama dielektriko santykinės dielektrinės skvarbos reikšmė.



6.8 pav. CST Microwave Studio 10 parametrų įvedimo langas



6.9 pav. Bangolaidžio matmenų ir terpės parametrų nustatymo langai



6.10 pav. Drude ir Lorentz modelių langai

Jeigu modeliuojami laukai puslaidininkiniuose bangolaidžiuose, paspaudžiama „Dispersion“ kortelė, esanti 6.9 pav. ir gaunamas 6.10 pav. „Dielectric dispersion“ lauko „Disp. model“ laukelyje pasirenkamas „Drude“ modelis. Į „Epsilon infinity“ laukelį įvedama puslaidininkio kristalinės gardelės konstanta ϵ_k^p (6.10 pav.). Į „Plasma frequency“ laukelį įvedamas plazminis kampinis, o į „Collision frequency“ – laisvųjų krūvininkų susidūrimų su puslaidininkio gardele ciklinis dažniai. Modeliuojant laukus feritiniuose bangolaidžiuose, 6.10 pav. „Dispersion“ kortelės „Magnetic dispersion“ lauko „Disp. model“ laukelyje pasirenkamas „Lorentz“ modelis. Į „Mue infinity“ lauką įvedama ferito santykinės magnetinės skvarbos μ_r^f skaitinė reikšmė. Žemiau įvedami giromagnetinio rezonanso kampinis ω_m („Resonance frequency“) ir silpimo ciklinis $\alpha f = \gamma \Delta H / 4\pi$ („Damping frequency“) dažniai.

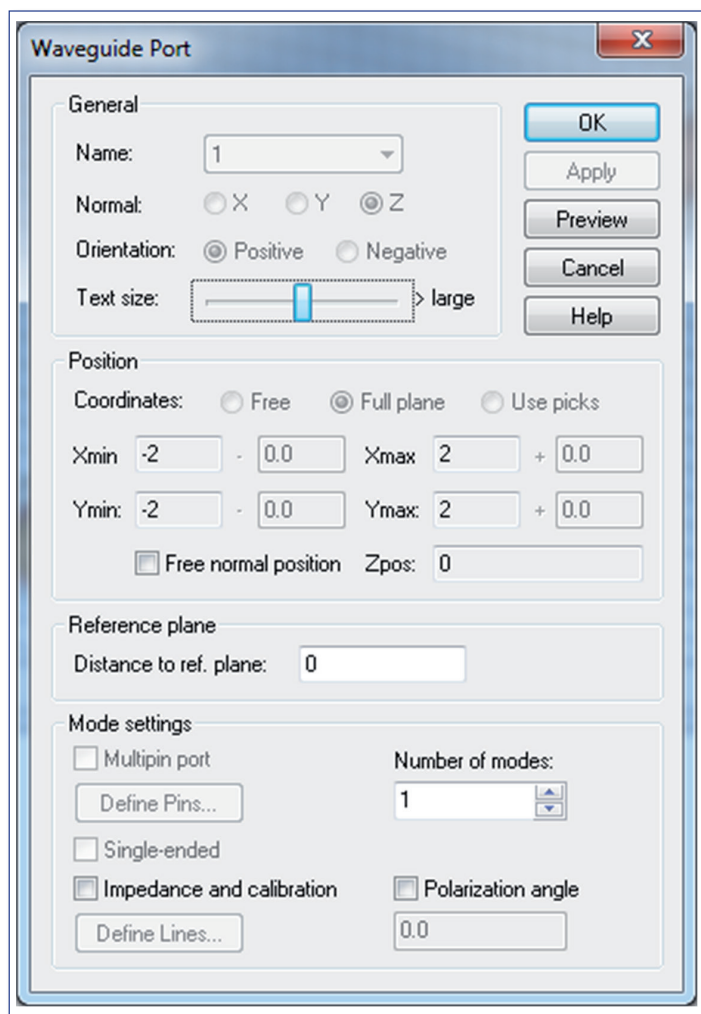
Kai EM laukai modeliuojami bangolaidyje su išoriniu dielektriko sluoksniu, 6.8 pav. paspaudžiama 3 numeriu pažymėta piktograma. Po to 6.9 pav. pateiktame terpės matmenų nustatymo „Cylinder“ lango „Inner radius“ laukelyje įvedamas 1 srities spindulys, „Outer radius“ – 2 srities spindulys, „Z_{max}“ laukelyje – bangolaidžio ilgis milimetrais. „Material“ laukelyje pasirenkama „New Material“ ir atsidariusiame 6.9 pav. lango „Type“ laukelyje pasirenkamas „Normal“ užrašas bei į „Epsilon“ laukelį įvedama išorinio dielektriko sluoksnio santykinė dielektrinė skvarba.

Uždedant trečiąjį, oro sluoksnį, reikia vadovautis nurodymais, kurie aprašo išorinio dielektriko sluoksnio įvedimą.

Po to 6.8 pav. paspaudžiama 4 numeriu pažymėta piktograma ir naujai atsidariusio „Waveguide Port“ lango, pateikto 6.11 pav., „Number of modes“ laukelyje įvedamas 1–11 bangų tipų skaičius ir paspaudžiamas „OK“ mygtukas.

6.8 pav. paspaudžiama 5 numeriu pažymėta piktograma ir naujai atsidariusiame „Solver parameters“ lange paspaudžiamas „Start“ mygtukas.

Prasidės laukų modeliavimas. Palaukiama, kol pasibaigs modeliavimas, kuris gali užtrukti iki kelių minučių.



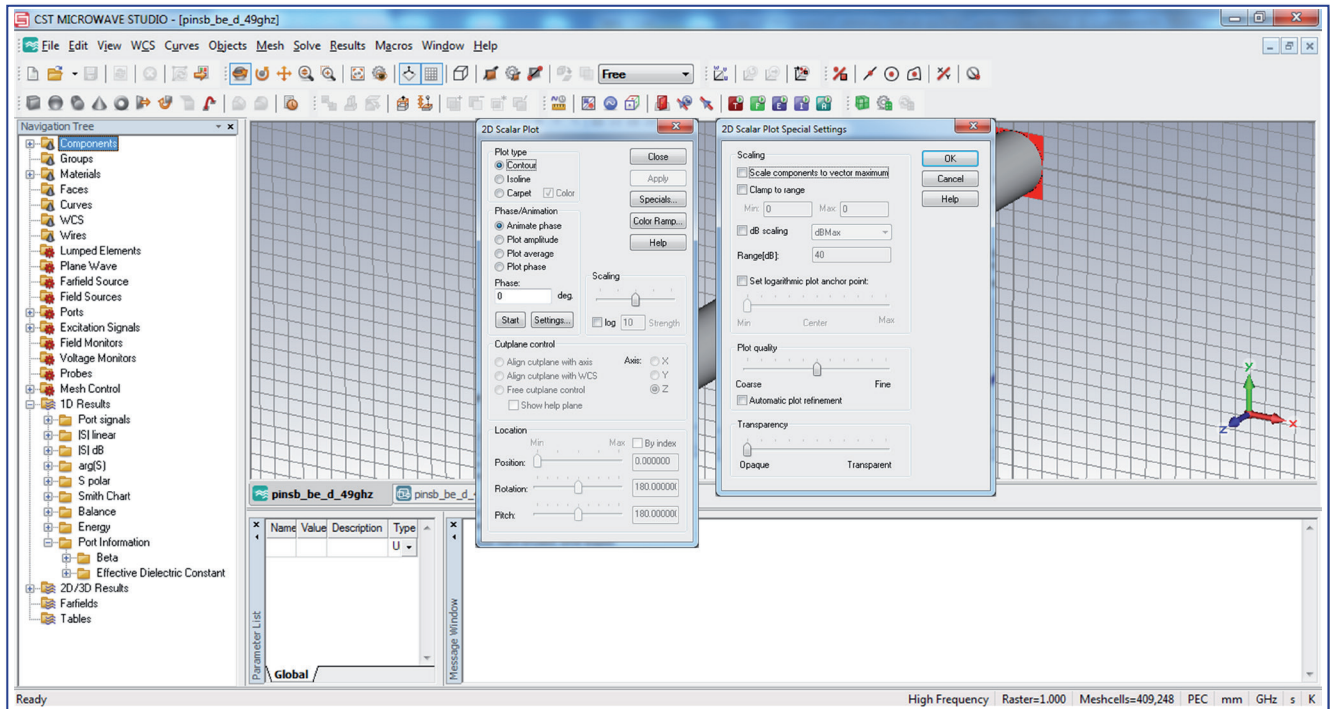
6.11 pav. Bangų tipų nustatymo langas

Modeliavimui pasibaigus 6.8 pav. kairiajame pagrindinio lango stulpelyje paėiliui spaudžiamos piktogramos „2D/3D Results“ → „Port Modes“ → „Port1“ ir pasirenkami elektrinio arba magnetinio laukų vaizdai, kurie sunumeruoti nuo e1, h1 iki e11, h11 ir pateikti atskiruose kataloguose.

Jeigu skersiniame bangolaidžio pjūvyje nematomi išilginių laukų stiprio spalvoti kontūrai arba jeigu laukai yra per stiprūs ir nematomi minimumai bei maksimumai, pakeičiamos laukų stiprio amplitudžių vaizdavimo ribos. Tam du kartus paspaudžiamas kairysis pelės mygtukas ant bangolaidžio paveikslo, pasirodo 6.12 pav. pateiktas „2D Scalar Plot“ langas, kuriame paspaudžiamas „Specials“ mygtukas. Po to pateikiamas „2D Scalar Plot Special Settings“ langas. Čia į „Min“ ir „Max“ laukelius įvedamos tokios reikšmės, kad laukų stiprio minimumai ir maksimumai būtų aiškiai matomi. Norint aiškiai matyti magnetinio lauko modelius, įvedami „Min“ lauke –30, „Max“ lauke 30 skaičiai. Elektrinio lauko modeliams – „Min“ = –3000, „Max“ = 3000.

Kai norima sužinoti fazės koeficientų kiekvienam bangos tipui reikšmes, reikia 6.8 pav. pagrindinio lango kairiajame stulpelyje pasirinkti „1D Results“ → „Port Information“ → „Beta“ ir bus pateiktas fazės koeficientų grafikas, esant vienam centriniam dažniui.

Norint pakeisti girotropinės šerdies arba išorinio dielektriko sluoksnio parametrus, būtina 6.8 pav. pagrindinio lango kairiajame stulpelyje pasirinkti „Materials“ ir du kartus spragtelėti virš pavadinimo medžiagos, kurios savybes norima pakeisti. Tada bus pateiktas 6.9 pav. langas.



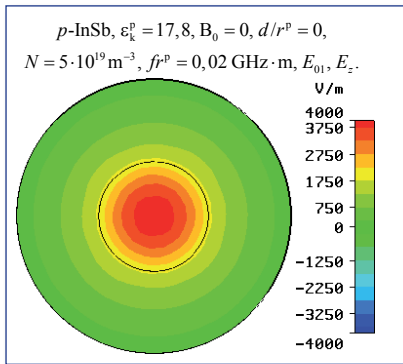
6.12 pav. EM laukų modeliavimo langas

Po to viskas atliekama pagal šiuos metodikos nurodymus iš pradžių.

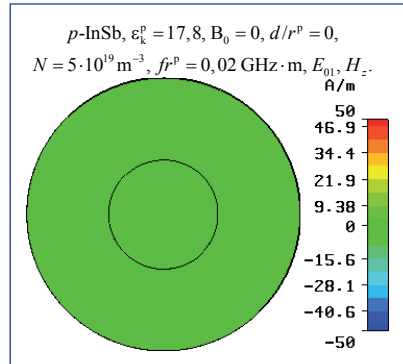
Užduotys ir sprendimai

6.5. Programų paketu CST Microwave Studio 10 gaukite bangų E_{01} (H_{01}) išilginių EM laukų pasiskirstymo modelius atviro apskrito puslaidininkinio p -InSb bangolaidžio, kurio kristalinės gardelės konstanta $\epsilon_k^p = 17,8$, $r^p = 1$ mm, $d = 0$ mm, skerspjūvyje, kai magnetinio srauto tankis $B_0 = 0$, skylių koncentracija $N = 5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$, normuotasis dažnis $f r^p = 0,02 \text{ GHz} \cdot \text{m}$ ($f r^p = 0,04 \text{ GHz} \cdot \text{m}$).

Sprendimas: 6.13, 6.14 pav. pateikiami nehibridinės E_{01} bangos išilginių EM laukų modeliai p -InSb puslaidininkiniame bangolaidyje, kurio išilgai neveikia pastovusis magnetinis laukas. 20 GHz dažnio elektrinio lauko išilginės komponentės E_z yra stipriausios puslaidininkinės šerdies centre ir tolygiai pasiskirsto išilgai perimetro. Magnetinis laukas neturi išilginių H_z komponentių ir yra tik skersinis. Tai paaiškinama tuo, kad šios bangos indeksai $m=0$, $n=1$.

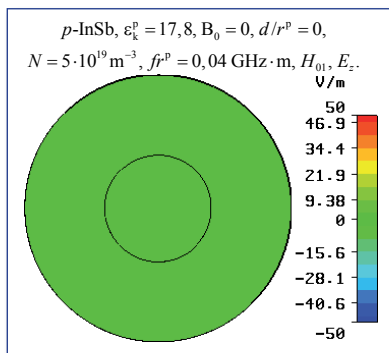


6.13 pav. Bangos E_{01} elektrinio lauko išilginių komponentių E_z modelis puslaidininkiniame p -InSb bangolaidyje

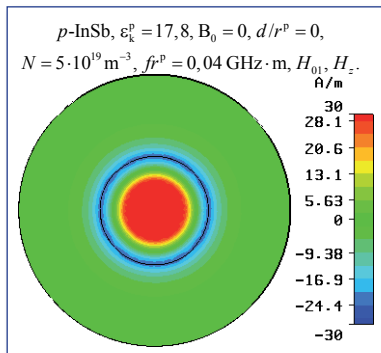


6.14 pav. Bangos E_{01} magnetinio lauko išilginių komponentių H_z modelis puslaidininkiniame p -InSb bangolaidyje

6.15, 6.16 pav. pateikiami irgi nehibridinės H_{01} bangos EM laukų modeliai, kai normuotasis dažnis yra dvigubai didesnis – $fr^p = 0,04 \text{ GHz} \cdot \text{m}$. 40 GHz dažnio elektrinis laukas neturi išilginių komponentių ir yra tik skersinis. Magnetinis laukas 6.16 pav. yra stipriausias puslaidininkinės šerdies centre ir kiek silpnesnis bei priešingos krypties puslaidininkio ir oro riboje. Tačiau jis irgi tolygiai pasiskirstęs išilgai perimetro.



6.15 pav. Bangos H_{01} elektrinio lauko išilginių komponentių E_z modelis puslaidininkiniame $p\text{-InSb}$ bangolaidyje



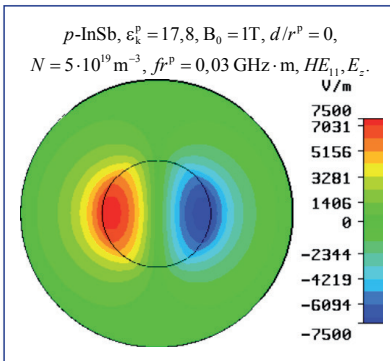
6.16 pav. Bangos H_{01} magnetinio lauko išilginių komponentių H_z modelis puslaidininkiniame $p\text{-InSb}$ bangolaidyje

Tai paaiškinama tuo, kad ir šios bangos indeksai $m=0$, $n=1$. Be to, būtent bangos su azimutinio periodiškumo indeksu $m=0$ yra nehibridinės ir tuo panašios į analogiškų tipų bangas metaliniuose bangolaidžiuose (žr. 5 skyrių). Tai patvirtina čia naudojamų algoritmų ir programų EM laukams atvirose apskrituose bangolaidžiuose modeliuoti teisingumą. Esminius skirtumus tarp E_{01} ir H_{01} bangų EM laukų modelių nurodo tik E ir H žymenys.

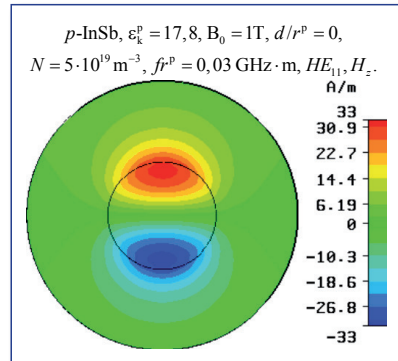
6.6. Gaukite kaip ir 6.5, tik pagrindinei HE_{11} tipo bangai, sklindančiai puslaidininkiniame ir puslaidininkiniame-dielektriniame $p\text{-InSb}$ bangolaidyje, kurio $d/r^p = 0,5$, $B_0 = 1 \text{ T}$, $fr^p = 0,03 \text{ GHz} \cdot \text{m}$.

Sprendimas: 6.17 ir 6.18 pav. pateikti pagrindinio tipo bangos HE_{11} išilginių komponentių E_z ir H_z laukai giroelektrinio $p\text{-InSb}$ puslaidininkinio

bangolaidžio be išorinio dielektriko sluoksnio skersiniuose pjūviuose. Šiuo atveju magnetinis laukas su $B_0 = 1 \text{ T}$ išilgai veikia p -InSb puslaidininkį, kurio santykinę dielektrinę skvarbą aprašo tenzorius $\tilde{\epsilon}_r^p$ (6.1), o puslaidininkio magnetinė skvarba yra $\mu_r^p = 1$. Šerdį gaubia 10 mm storio oro sluoksnis, kurio $\epsilon_r^0 = 1$, $\mu_r^0 = 1$. EM banga ore labai silpsta, todėl nėra prasmės vaizduoti viso oro sluoksnio storio, nes lauko modelis šerdyje būtų sunkiai įžiūrimas dėl šerdies santykinio sumažėjimo lyginant su oro sluoksniu. Elektrinio ir magnetinio laukų išilginės komponentės yra stipriausios šerdyje, bet koncentruojasi prie puslaidininkio ir oro ribos, kur susidaro du ateinančių į mus ir nueinančių nuo mūsų komponentių ekstremumai. Elektrinio lauko išilginės komponentės pasuktos magnetinio lauko išilginių komponentžių atžvilgiu 90° kampu. Tai atitinka žinomą faktą, kad skersinės šių laukų komponentės turi būti statmenos tarpusavyje ir kokybiniu požiūriu dar kartą patvirtina modelių teisingumą. Be to, galima palyginti originalia programa MATLAB® terpėje ir programų paketu CST *Microwave Studio* 10 nepriklausomai gautus pagrindinės HE_{11} bangos laukų modelius, pateiktus 6.4 pav. a , b ir 6.17, 6.18 pav. Pirmuosiuose laukai vaizduojami spalvotais vienodo stiprio kontūrais, pastaruosiuose – vieno do stiprio sritimis, tačiau iš esmės laukų modeliai yra gana panašūs.

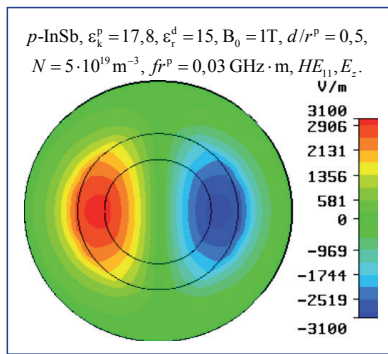


6.17 pav. Bangos HE_{11} elektrinio lauko išilginių komponentžių E_z modelis puslaidininkiniame p -InSb bangolaidyje

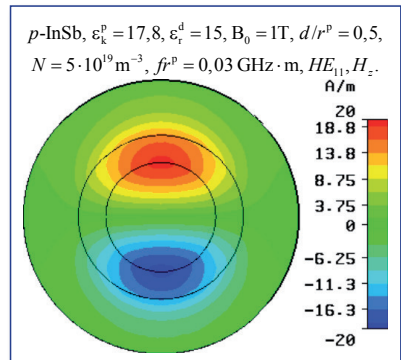


6.18 pav. Bangos HE_{11} magnetinio lauko išilginių komponentžių H_z modelis puslaidininkiniame p -InSb bangolaidyje

6.19 ir 6.20 pav. yra pateikti pagrindinio tipo bangos HE_{11} išilginių komponentių E_z ir H_z laukai giroelektrinio p -InSb puslaidininkinio-dielektrinio bangolaidžio su išorinio dielektriko sluoksniu skersiniuose pjūviuose. Šerdį gaubia 0,5 mm storio dielektriko sluoksnis, kurio santykinė dielektrinė skvarba yra $\epsilon_r^d = 15$, t. y. mažesnė už nemagnetinio p -InSb puslaidininkio kristalinės gardelės konstantą $\epsilon_k^p = 17,8$, o $\mu_r^p = 1$. Išorinį dielektriką savo ruožtu gaubia oro sluoksnis, kurio $\epsilon_r^o = 1$, $\mu_r^o = 1$.



6.19 pav. Bangos HE_{11} elektrinio lauko išilginių komponentių E_z modelis puslaidininkiniame-dielektriniame p -InSb bangolaidyje, kai $d/r^p = 0,5$

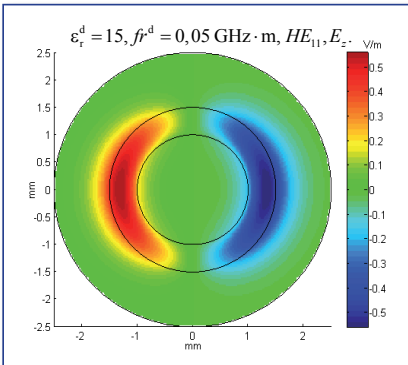


6.20 pav. Bangos HE_{11} magnetinio lauko išilginių komponentių H_z modelis puslaidininkiniame-dielektriniame p -InSb bangolaidyje, kai $d/r^p = 0,5$

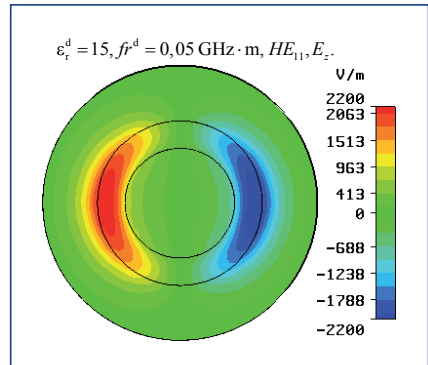
Lyginant tarpusavyje pagrindinės HE_{11} bangos išilginių EM laukų E_z modelius (6.17, 6.19 pav.) pastebima, kad išorinis dielektriko sluoksnis atitraukia stipriausią elektrinį lauką į save iš puslaidininkinės šerdies, šuntuodamas ją ir orą. Lyginant 6.18 ir 6.20 pav. taip pat matyti, kad išorinis dielektriko sluoksnis kartu su išilginiu elektriniu E_z atitraukia ir išilginį magnetinį H_z lauką, nes jie susiję tarpusavyje.

6.7. Palyginkite pagrindinės HE_{11} bangos, sklindančios dielektriniame vamzdyje, kurio santykinė dielektrinė skvarba yra $\epsilon_r^d = 15$, išilginių EM laukų modelius, gautus originalia programa MATLAB® terpėje ir programų paketu CST Microwave Studio 10, kai apskrito tuščiavidurio vamzdelio vidinis spindulys $r^d = 1$ mm, sienelės santykinis storis $d / r^d = 0,5$, $f r^d = 0,05$ GHz·m.

Sprendimas: 6.21–6.24 pav. pateikti pagrindinės HE_{11} tipo bangos išilginių EM laukų modeliai dielektriniame vamzdyje, kurio vidus ir išorė užpildyti oru. Elektriniai laukai (6.21, 6.22 pav.) yra stipriausi dielektriko sluoksnyje – vamzdelio sienelėje, silpniausi – vidiniame oro kanale. Programa MATLAB® terpėje ir programų paketu CST Microwave Studio 10 gauti išilginių elektrinių laukų modeliai kokybiniu požiūriu yra gana panašūs.



6.21 pav. Bangos HE_{11} elektrinio lauko išilginių komponentių E_z modelis dielektriniame vamzdyje, kai $f r^d = 0,05$ GHz·m (MATLAB®)

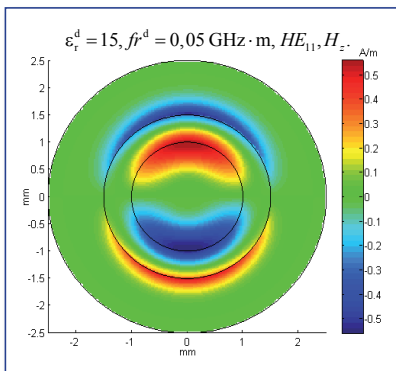


6.22 pav. Bangos HE_{11} elektrinio lauko išilginių komponentių E_z modelis dielektriniame vamzdyje, kai $f r^d = 0,05$ GHz·m (Microwave)

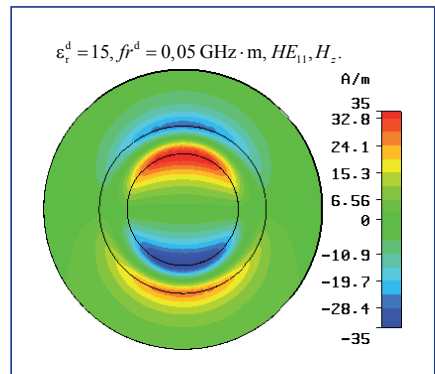
6.23, 6.24 pav. pateikti HE_{11} tipo bangos išilginių magnetinių laukų modeliai tame pačiame dielektriniame vamzdyje. Pastebima, kad magnetiniai laukai koncentruojasi ne dielektrike, kaip elektriniai laukai, o ant ribų tarp dielektriko ir oro sluoksnių. Skirtingomis programomis gauti

modeliai irgi yra panašūs, bet šiek tiek daugiau skiriasi išilginių magnetinių laukų stiprių riba tarp dielektrinio vamzdelio ir išorinio oro sluoksnio.

Nepaisant gana akivaizdaus kokybinio panašumo, kiekybinis požūriu laukų stipriai, apskaičiuoti minėtomis programomis, labai skiriasi. Tai susiję su nenustatytų pradinių ir žadinimo sąlygų problema EM bangoms abiejose programose. Joms nustatyti reikia žinoti EM laukų pasiskirstymą bangolaidžiuose. Iš kitos pusės, laukų pasiskirstymas ir stipris labai priklauso nuo žadinimo sąlygų. Atvirose apskrituose dielektriniuose, vienaalyčiuose optiniuose ir girotropiniuose bangolaidžiuose sunkiai pritaikomi klasikiniai metalinių bangolaidžių ir rezonatorių žadinimo elementai – strypeliai, kilpos ir plyšiai. Jie netinka dėl ypač aukštųjų dažnių (YAD), trumpų bangų, mažų bangolaidžių matmenų ir vienaalyčių konstrukcijų, į kurių vidų įsiskverbti, nepažeidus EM laukų, neįmanoma.



6.23 pav. Bangos HE_{11} magnetinio lauko išilginių komponentių H_z modelis dielektriniame vamzdyje, kai $f r^d = 0,05 \text{ GHz} \cdot \text{m}$ (MATLAB®)



6.24 pav. Bangos HE_{11} magnetinio lauko išilginių komponentių H_z modelis dielektriniame vamzdyje, kai $f r^d = 0,05 \text{ GHz} \cdot \text{m}$ (Microwave)

Dielektriniai, vienaalyčiai optiniai ir giromagnetiniai feritiniai bangolaidžiai gana seniai ir plačiai taikomi. Tačiau jų valdymas yra komplikotas. Feritiniai bangolaidžiai dažniausiai valdomi išoriniu magnetiniu

lauku. Tuo tarpu giroelektriniai puslaidininkiniai bangolaidžiai gali būti valdomi magnetiniu ir elektriniu laukais, temperatūra, šviesa, rentgeno, γ ir kt. spinduliais. Jau nebekalbant apie didelę galimą tokių bangolaidžių medžiagų įvairovę. Tačiau kol kas giroelektriniai puslaidininkiniai bangolaidžiai ir mikrobangų įtaisai jų pagrindu yra nepakankami ištirti ir tai yra rimta mokslinė bei praktinė problema. Be gana sudėtingo ir brangaus licenzijuotų programų paketo CST *Microwave Studio* 10 nepavyks atlikti tokių netipinių užduočių, todėl daugiau čia jų nepateikiama.

LITERATŪRA

1. Amanogawa.com. Interactive Software for Education. 2006. *Digital Maestro Series the Power of Jawa™ for education* [interaktyvus], [žiūrėta 2011 m. rugsėjo 2 d.]. Prieiga per internetą: <<http://www.amanogawa.com/index.html>>.
2. Bogdanovičius, A. 2007. *Fizika 2. Aiškinamasis uždavinynas*. Vilnius: Technika. 100 p.
3. Griffiths, D. J. 2008. *Introduction to electrodynamics*. San Francisco (Calif.): Pearson/Benjamin Cummings. 576 p.
4. Lietuvos higienos norma HN 80:2011 *Elektromagnetinis laukas darbo vietose ir gyvenamojoje aplinkoje. Parametrų normuojamos vertės ir matavimo reikalavimai 10 kHz–300 GHz radijo dažnių juostoje* [interaktyvus], [žiūrėta 2011 m. rugsėjo 2 d.]. Prieiga per internetą: <<http://tar.tic.lt/Default.aspx?id=2&item=results&aktoid=02BE655C-07B6-4A77-98C6-45D9797974FE>>.
5. Mališauskas, V.; Sledevič, T. 2011. Investigation of the Electromagnetic Fields in Gyrotropic Waveguides. *Electronics and Electrical Engineering* 1(107), p. 29–32.
6. Mališauskas, V.; Plonis, D. 2010. Dispersion Characteristic of the Propagation Waves in the Gyroelectric Semiconductor Waveguides. *Electronics and Electrical Engineering*, 10 (106), p. 87–90.
7. Mickūnas, S. 2004. *Elektromagnetiniai laukai ir bangos: vadovėlis*. Kaunas: Technologija. 259 p.
8. Mockus, V. 2002. *Fizikos žinynas moksleiviams*. Šiauliai. 599 p.
9. *Mokinio žinynas: matematika, fizika, chemija, biologija, anglų kalba, rusų kalba*. 2004. Versta iš rusų kalbos. Red. Mudėnienė, R.; Rimšienė, D.; Puidokienė, A. Vilnius: Alma littera. 500 p.

10. Nickelson, L.; Ašmontas, S.; Mališauskas, V.; Šugurovas, V. 2007. *Atvirieji cilindriniai girotropiniai bangolaidžiai*: monografija. Vilnius: Technika. 248 p.
11. *QuickTime Movies of Electromagnetic Waves*. Iowa State University [interaktyvus], [žiūrėta 2011 m. rugsėjo 5 d.]. Prieiga per internetą: <http://local.eleceng.uct.ac.za/courses/EEE3055F/iowa_state/em_movies.html>.
12. Vainoris, Z. 2004. *Bangų elektronikos pagrindai*: vadovėlis. Vilnius: Technika. 515 p.
13. Virbalis, J. A.; Žebrauskas, S. 2001. *Elektromagnetinio lauko uždavinynas*: mokomoji knyga. Kaunas: Technologija. 67 p.
14. Алексеев, А. И. 2008. *Сборник задач по классической электродинамике*: Учебное пособие. Санкт Петербург: Лань. 320 с.
15. Батыгин, В. В.; Топтыгин, И. Н. 2010. *Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности*. Санкт Петербург: Лань. 480 с.

PRIEDAI

1 priedas. Elektromagnetinio lauko teorijos namų darbai

1.1 priedas. Elektromagnetinių bangų poliarizacija, atspindys nuo dviejų terpių ribos ir interferencija

Užduotys (1.1.1p–1.1.3p ir 1.1 priedo lentelė)

1.1.1p. Išveskite dviejų EM bangų su statmenomis poliarizacijos plokštumomis suminės bangos elektrinio stiprio vektoriaus modulio $|E_{\Sigma}(z, t)|$ ir poliarizacijos plokštumos posūkio kampo θ galutines išraiškas, kai $E_{ym} > ? = ? < E_{xm}$, $\varphi_y - \varphi_x = ???$. Ant balto, languoto arba milimetrinio popieriaus lapo nubraižykite visų trijų EM bangų elektrinio stiprio vektorių $E_x(t)$, $E_y(t)$, $|E_{\Sigma}(t)|$ kitimo laike grafikus. Nurodykite visų bangų poliarizacijos tipus (žr. 3 skyrių ir [12, p. 153–157]).

1.1.2p. Plokščia EM banga, kurios dažnis ??? GHz, krinta statmenai į plokščią 1 ir 2 terpių ribą. Apskaičiuokite atspindžio nuo terpių ribos koeficientą $\underline{p}_r$ ir perėjos koeficientus $\underline{q}_E$, $\underline{q}_H$, nurodykite atspindėtosios, perėjusiosios ir krintančiosios EM bangų amplitudžių santykius, kai 1 terpė yra idealusis dielektrikas su $\epsilon_{r1} = ???$, $\mu_{r1} = ???$, o 2 terpė – idealusis dielektrikas su $\epsilon_{r2} = ???$, $\mu_{r2} = ???$ (nenurodyti $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1$, $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$). Pagal amplitudžių santykius ir bangų ilgius nubraižykite ant balto, languoto arba milimetrinio popieriaus lapo skirtingomis spalvomis elektrinio ir magnetinio laukų stiprio amplitudžių $E_{xm}(z)$, $H_{ym}(z)$ pasiskirstymo išilgai EM bangos sklidimo krypties z grafikus vienoje koordinatinių sistemoje. Grafikuose nurodykite bangų režimus (bėgančiųjų bangų BB,

stovinčiųjų – SB, mišriųjų – MB) 1 ir 2 terpėse (žr. 4 skyrių ir [12, p. 168–171]).

1.1.3p. *Ant balto, languoto arba milimetrinio popieriaus lapo skirtingomis spalvomis viename paveiksle nubraižykite nuožulniai kampu $\varphi = ???$ į idealiojo laidininko plokštumą krintančiosios ir atspindėtosios plokščiųjų EM bangų frontų tinklėlį su išskirtu rombu, vektorius $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{\Pi}$, suminio elektromagnetinio lauko vektorių $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}_{sl}$, $\mathbf{J}_{ls}$ linijas ir paviršinius krūvius q_s , kai visi elektrinio lauko stiprio vektoriai $\mathbf{E}$ (magnetinio – $\mathbf{H}$) yra lygiagretūs y ašiai – $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_y$ (arba $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_y$) (žr. 4 skyrių ir [12, p. 171–177]).*

1.1 priedo lentelė. 1.1.1p–1.1.3p užduočių lentelė

Varianto Nr.	1.1.1p užduotis		1.1.2p užduotis		1.1.3p užduotis	
	$E_{ym} ??? E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = ???$	1 terpė	2 terpė	$??? \parallel \mathbf{e}_y$	$\varphi = ???$
1.	<	3π				
2.					E	30°
3.			Id. diel. $\mu_{r1}=1$	Id. diel. $\mu_{r2}=4$		
4.	>	$-17\pi/12$				
5.					H	75°
6.			Id. diel. $\epsilon_{r1}=14$	Id. diel. $\epsilon_{r2}=3,5$		
7.	=	$\pi/4$				
8.					E	50°
9.			Id. diel. $\mu_{r1}=4$	Id. diel. $\mu_{r2}=1$		
10.	<	$-7\pi/6$				
11.					H	40°
12.			Id. diel. $\epsilon_{r1}=3,3$	Id. diel. $\epsilon_{r2}=13,2$		
13.	>	$-\pi/2$				

Varianto Nr.	1.1.1p užduotis		1.1.2p užduotis		1.1.3p užduotis	
	$E_{ym} ??? E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = ???$	1 terpė	2 terpė	$??? e_y$	$\varphi = ???$
14.					E	15°
15.			Id. diel. $\mu_{r1}=1,1$	Id. diel. $\mu_{r2}=4,4$		
16.	$=$	$-3\pi/2$				
17.					H	60°
18.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=16,4$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=4,1$		
19.	$<$	$3\pi/4$				
20.					E	35°
21.			Id. diel. $\mu_{r1}=4,4$	Id. diel. $\mu_{r2}=1,1$		
22.	$>$	$-2\pi/3$				
23.					H	25°
24.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=4,5$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=18$		
25.	$=$	π				
26.					E	70°
27.			Id. diel. $\mu_{r1}=1,3$	Id. diel. $\mu_{r2}=5,2$		
28.	$<$	$-5\pi/12$				
29.					H	45°
30.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=6$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=1,5$		
31.	$>$	$5\pi/4$				
32.					E	20°
33.			Id. diel. $\mu_{r1}=6,8$	Id. diel. $\mu_{r2}=1,7$		
34.	$=$	$-\pi/6$				
35.					H	65°
36.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=1,5$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=6$		

Varianto Nr.	1.1.1p užduotis		1.1.2p užduotis		1.1.3p užduotis	
	$E_{ym} ??? E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = ???$	1 terpė	2 terpė	$??? e_y$	$\varphi = ???$
37.	<	$3\pi/2$				
38.					E	33°
39.			Id. diel. $\mu_{r1}=1,9$	Id. diel. $\mu_{r2}=7,6$		
40.	>	$-23\pi/12$				
41.					H	55°
42.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=10,8$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=2,7$		
43.	=	$7\pi/4$				
44.					E	42°
45.			Id. diel. $\mu_{r1}=7,6$	Id. diel. $\mu_{r2}=1,9$		
46.	<	$-5\pi/3$				
47.					H	67°
48.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=1,7$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=6,8$		
49.	>	$\pi/6$				
50.					E	38°
51.			Id. diel. $\mu_{r1}=2,1$	Id. diel. $\mu_{r2}=8,4$		
52.	=	$5\pi/12$				
53.					H	53°
54.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=14,8$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=3,7$		
55.	<	$11\pi/6$				
56.					E	27°
57.			Id. diel. $\mu_{r1}=16,8$	Id. diel. $\mu_{r2}=4,2$		
58.	>	$3\pi/6$				
59.					H	62°

Varianto Nr.	1.1.1p užduotis		1.1.2p užduotis		1.1.3p užduotis	
	$E_{ym} ??? E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = ???$	1 terpė	2 terpė	$??? e_y$	$\varphi = ???$
60.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=3,7$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=14,8$		
61.	=	$-\pi$				
62.					E	47°
63.			Id. diel. $\mu_{r1}=4,3$	Id. diel. $\mu_{r2}=17,2$		
64.	<	$2\pi/3$				
65.					H	22°
66.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=15,6$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=3,9$		
67.	>	$-3\pi/4$				
68.					E	58°
69.			Id. diel. $\mu_{r1}=8,4$	Id. diel. $\mu_{r2}=2,1$		
70.	=	$11\pi/12$				
71.					H	30°
72.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=2,9$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=11,6$		
73.	<	$\pi/2$				
74.					E	75°
75.			Id. diel. $\mu_{r1}=2,5$	Id. diel. $\mu_{r2}=10$		
76.	>	$7\pi/6$				
77.					H	50°
78.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=19,6$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=4,9$		
79.	=	$-\pi/4$				
80.					E	40°
81.			Id. diel. $\mu_{r1}=9,2$	Id. diel. $\mu_{r2}=2,3$		
82.	<	$17\pi/12$				

Varianto Nr.	1.1.1p užduotis		1.1.2p užduotis		1.1.3p užduotis	
	$E_{ym} ??? E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = ???$	1 terpė	2 terpė	$??? e_y$	$\varphi = ???$
83.					H	15°
84.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=3,1$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=12,4$		
85.	>	-2π				
86.					E	60°
87.			Id. diel. $\mu_{r1}=2,3$	Id. diel. $\mu_{r2}=9,2$		
88.	=	$5\pi/3$				
89.					H	35°
90.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=12,4$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=3,1$		
91.	<	$-7\pi/4$				
92.					E	25°
93.			Id. diel. $\mu_{r1}=18$	Id. diel. $\mu_{r2}=4,5$		
94.	>	$23\pi/12$				
95.					H	70°
96.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=2,7$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=10,8$		
97.	=	$\pi/12$				
98.					E	45°
99.			Id. diel. $\mu_{r1}=4,5$	Id. diel. $\mu_{r2}=18$		
100.	<	$-4\pi/3$				
101.					H	20°
102.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=11,6$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=2,9$		
103.	>	$\pi/3$				
104.					E	65°
105.			Id. diel. $\mu_{r1}=18,8$	Id. diel. $\mu_{r2}=4,7$		

Varianto Nr.	1.1.1p užduotis		1.1.2p užduotis		1.1.3p užduotis	
	$E_{ym} ??? E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = ???$	1 terpė	2 terpė	$??? e_y$	$\varphi = ???$
106.	=	2π				
107.					H	33°
108.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=3,5$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=14$		
109.	<	$7\pi/12$				
110.					E	55°
111.			Id. diel. $\mu_{r1}=4,7$	Id. diel. $\mu_{r2}=18,8$		
112.	>	$5\pi/6$				
113.					H	42°
114.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=13,2$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=3,3$		
115.	=	$-7\pi/12$				
116.					E	67°
117.			Id. diel. $\mu_{r1}=19,6$	Id. diel. $\mu_{r2}=4,9$		
118.	<	$13\pi/12$				
119.					H	38°
120.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=3,9$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=15,6$		
121.	>	$-12\pi/4$				
122.					E	53°
123.			Id. diel. $\mu_{r1}=4,9$	Id. diel. $\mu_{r2}=19,6$		
124.	=	$4\pi/3$				
125.					H	27°
126.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=16$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=4$		
127.	<	$-5\pi/4$				
128.					E	62°

Varianto Nr.	1.1.1p užduotis		1.1.2p užduotis		1.1.3p užduotis	
	$E_{ym} ??? E_{xm}$	$\varphi_y - \varphi_x = ???$	1 terpė	2 terpė	$??? e_y$	$\varphi = ???$
129.			Id. diel. $\mu_{r1}=20$	Id. diel. $\mu_{r2}=5$		
130.	$>$	$19\pi/12$				
131.					H	47°
132.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=4$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=16$		
133.	$=$	$-11\pi/6$				
134.					E	22°
135.			Id. diel. $\mu_{r1}=5$	Id. diel. $\mu_{r2}=20$		
136.	$<$	$-2\pi/6$				
137.					H	58°
138.			Id. diel. $\varepsilon_{r1}=18$	Id. diel. $\varepsilon_{r2}=4,5$		

1.2 priedas. Elektromagnetiniai laukai metaliniuose stačiakampiuose ir apskrituose bangolaidžiuose bei bangolaidiniuose rezonatoriuose

Užduotys (1.2.1p, 1.2.2p ir 1.2 priedo lentelė)

1.2.1p. *Ant balto, languoto arba milimetrinio popieriaus lapo skirtingomis spalvomis nubraižykite E_{mn} (H_{mn}) tipo EM bangos, žadinamos strypeliu (kilpa, plyšiu) stačiakampiamė ($a > 2b$, $l > \lambda_b > 2a$) (apskritame, $r = a$, $l > \lambda_b > 4a$) bangolaidyje EM lauko vektorių E , J_{sl} , H , J_{ls} linijas ir paviršinius krūvius q_s . Aptarkite žadinimo būdo parinkimą (žr. 5 skyrių ir [12, p. 248–278]).*

1.2.2p. *Ant balto, languoto arba milimetrinio popieriaus lapų skirtingomis spalvomis nubraižykite H_{mnp} (E_{mnp}) tipo EM bangos, žadinamos kilpa (plyšiu, strypeliu) apskritame ($r = a$, $l_r > 4a$, žadinama gale) (stačiakampiamė, $a > 2b$, $l_r > 2a$, žadinama gale) bangolaidiniame rezonatoriuje EM lauko vektorių E , J_{sl} , H , J_{ls} linijas ir paviršinius krūvius q_s . Aptarkite žadinimo būdo parinkimą (žr. 5 skyrių ir [12, p. 248–278, 290–292]).*

1.2 priedo lentelėje yra nurodytos ir neegzistuojančių tipų EM bangos. Nupieškite jų laukų išilgines komponentes bangolaidžių (rezonatorių) skerspjūviuose. Nurodykite, kodėl šių tipų bangos neegzistuoja.

1.2 priedo lentelė. 1.2.1p, 1.2.2p užduočių lentelė

Varianto Nr.	1.2.1p užduotis – bangolaidis		1.2.2p užduotis – rezonatorius	
	Forma, banga	Žadinimo elementas	Forma, banga	Žadinimo elementas
1.	$\square$, H_{02}	Strypelis		
2.			O, E_{331}	Kilpa

Varianto Nr.	1.2.1p užduotis – bangolaidis		1.2.2p užduotis – rezonatorius	
	Forma, banga	Žadinimo elementas	Forma, banga	Žadinimo elementas
3.	O, H_{21}	Plyšys		
4.			$\square$, E_{131}	Strypelis
5.	$\square$, E_{31}	Kilpa		
6.			O, H_{022}	Plyšys
7.	O, E_{22}	Strypelis		
8.			$\square$, H_{122}	Kilpa
9.	$\square$, H_{31}	Plyšys		
10.			O, E_{022}	Strypelis
11.	O, H_{00}	Kilpa		
12.			$\square$, E_{231}	Plyšys
13.	$\square$, E_{33}	Strypelis		
14.			O, H_{311}	Kilpa
15.	O, E_{32}	Plyšys		
16.			$\square$, H_{031}	Strypelis
17.	$\square$, H_{22}	Kilpa		
18.			O, E_{210}	Plyšys
19.	O, H_{13}	Strypelis		
20.			$\square$, E_{121}	Kilpa
21.	$\square$, E_{21}	Plyšys		
22.			O, H_{231}	Strypelis
23.	O, E_{03}	Kilpa		
24.			$\square$, H_{321}	Plyšys
25.	$\square$, H_{23}	Strypelis		
26.			O, E_{212}	Kilpa
27.	O, H_{33}	Plyšys		
28.			$\square$, E_{221}	Strypelis
29.	$\square$, E_{01}	Kilpa		
30.			O, H_{031}	Plyšys
31.	O, E_{31}	Strypelis		

Varianto Nr.	1.2.1p užduotis – bangolaidis		1.2.2p užduotis – rezonatorius	
	Forma, banga	Žadinimo elementas	Forma, banga	Žadinimo elementas
32.			$\square$, H_{331}	Kilpa
33.	$\square$, H_{21}	Plyšys		
34.			O, E_{122}	Strypelis
35.	O, H_{12}	Kilpa		
36.			$\square$, E_{101}	Plyšys
37.	$\square$, E_{13}	Strypelis		
38.			O, H_{222}	Kilpa
39.	O, E_{33}	Plyšys		
40.			$\square$, H_{311}	Strypelis
41.	$\square$, H_{13}	Kilpa		
42.			O, E_{222}	Plyšys
43.	O, H_{02}	Strypelis		
44.			$\square$, E_{321}	Kilpa
45.	$\square$, E_{23}	Plyšys		
46.			O, H_{212}	Strypelis
47.	O, E_{02}	Kilpa		
48.			$\square$, H_{022}	Plyšys
49.	$\square$, H_{12}	Strypelis		
50.			O, E_{321}	Kilpa
51.	O, H_{31}	Plyšys		
52.			$\square$, E_{331}	Strypelis
53.	$\square$, E_{30}	Kilpa		
54.			O, H_{131}	Plyšys
55.	O, E_{21}	Strypelis		
56.			$\square$, H_{231}	Kilpa
57.	$\square$, H_{03}	Plyšys		
58.			O, E_{031}	Strypelis
59.	O, H_{23}	Kilpa		
60.			$\square$, E_{311}	Plyšys

Varianto Nr.	1.2.1p užduotis – bangolaidis		1.2.2p užduotis – rezonatorius	
	Forma, banga	Žadinimo elementas	Forma, banga	Žadinimo elementas
61.	$\square$, E_{12}	Strypelis		
62.			O, H_{301}	Kilpa
63.	O, E_{12}	Plyšys		
64.			$\square$, H_{221}	Strypelis
65.	$\square$, H_{32}	Kilpa		
66.			O, E_{311}	Plyšys
67.	O, H_{03}	Strypelis		
68.			$\square$, E_{212}	Kilpa
69.	$\square$, E_{00}	Plyšys		
70.			O, H_{331}	Strypelis
71.	O, E_{13}	Kilpa		
72.			$\square$, H_{212}	Plyšys
73.	$\square$, H_{33}	Strypelis		
74.			O, E_{131}	Kilpa
75.	O, H_{22}	Plyšys		
76.			$\square$, E_{032}	Strypelis
77.	$\square$, E_{22}	Kilpa		
78.			O, H_{122}	Plyšys

2 priedas. Pagrindiniai ir papildomieji SI vienetai

2 priedo lentelė. Pagrindiniai ir papildomieji SI vienetai

Dydis	Dimensija	Pavadinimas	Vienetas	Apibrėžtis
Pagrindiniai SI vienetai				
Ilgis	L	metras	m	Atstumas, kurį vakuume nusklinda šviesa per $1/299792458$ s
Masė	M	kilogramas	kg	Tarptautinio kilogramo etalono masė
Laikas	T	sekundė	s	Laikas, lygus spinduliavimo, atitinkančio šuolį tarp ^{133}Cs atomo pagrindinės būsenos dviejų hipersmulkiosios sandaros lygmenų, 9 192 631 770 periodų trukmei
Elektros srovės stipris	I	amperas	A	Stipris nuolatinės el. srovės, kuri tekėdama dviem tiesiais lygiagrečiais be galo ilgaus nykstamojo apvalaus skerspjūvio laidais, esančiais vakuume 1 m atstumu vienas nuo kito, sukelia tarp jų $2 \cdot 10^{-7}$ N sąveikos jėgą kiekvienam laidų ilgio metrui
Termodinaminė temperatūra	Θ	kelvinas	K	Vandens trigubojo taško termodinaminės t-ros $1/273,16$ dalis

Dydis	Dimensija	Pavadinimas	Vienetas	Apibrėžtis
Pagrindiniai SI vienetai				
Medžiagos kiekis	N	molis	mol	Medžiagos kiekis sistemos su tiek pat struktūrinių elementų (atomų, molekulių, jonų, elektronų ir kt. dalelių arba jų grupių), kiek atomų yra 0,012 kg anglies ^{12}C
Šviesos stipris	J	kandela	cd	Šviesos stipris šaltinio, kuris tam tikra kryptimi skleidžia 540 THz ir 1/683 W steradianui stiprio spinduliuotę
Papildomieji SI vienetai				
Plokščiasis kampas	1	radianas	rad	Plokščiasis kampas tarp dviejų apskritimo spindulių, kai lanko ilgis tarp jų galų lygus šio apskritimo spinduliui
Erdvinis kampas	1	steradianas	sr	Erdvinis kampas su viršūne sferos centre, išpjaunantis sferos paviršiuje figūrą, lygiaplotę kvadratui, kurio kraštinė lygi šios sferos spinduliui

2 priedo lentelėje santykinių (nedimensinių) papildomųjų SI vienetų rad ir sr dimensijos lygios 1.

3 priedas. Svarbiausieji išvestiniai SI vienetai

3 priedo lentelėje pateiktos svarbiausių išvestinių SI vienetų dimensijos, sudarytos iš SI pagrindinių vienetų dimensijų, pakeltų tam tikru teigiamuoju arba neigiamuoju laipsniu, sandaugų.

3 priedo lentelė. Svarbiausieji išvestiniai SI vienetai

Dydis	Dimensija	Pavadinimas	Vienetas
Erdvė ir laikas			
Plotas	L^2	kvadratinis metras	m^2
Tūris, talpa	L^3	kubinis metras	m^3
Greitis (linijinis)	LT^{-1}	metras sekunde	m/s
Pagreitis	LT^{-2}	metras sekunde kvadratu	m/s^2
Kampinis greitis (dažnis)	T^{-1}	radianas sekunde	rad/s
Periodiniai reiškiniai, virpesiai ir bangos			
Bangos ilgis	L	metras	m
Bangos skaičius	L^{-1}	atvirkštinis metras, vienetas metrui	m^{-1} , $1/m$
Periodas	T	sekundė	s
Periodinis virpesių dažnis	T^{-1}	hercas	Hz
Silpimo (silpninimo), fazės, sklaidimo koeficientai	L^{-1}	atvirkštinis metras, vienetas metrui	m^{-1} , $1/m$
Slopi(ni)mo koeficientas	T^{-1}	atvirkštinė sekundė, vienetas sekunde	s^{-1} , $1/s$
Sukimosi greitis, (sūkių dažnis)	T^{-1}	atvirkštinė sekundė, vienetas sekunde	s^{-1} , $1/s$
Elektra ir magnetizmas			
Elektros krūvis, kiekis, elektrinis srautas	TI	kulonas	C
Elektros krūvio tūrinis tankis	$L^{-3}TI$	kulonas kubiniam metrui	C/m^3

Dydis	Dimensija	Pavadinimas	Vienetas
Elektra ir magnetizmas			
Elektros krūvio paviršinis tankis	$L^{-2}TI$	kulonas kvadratiniam metrui	C/m^2
Elektros krūvio linijinis tankis	$L^{-1}TI$	kulonas metrui	C/m
Elektrinio lauko stipris	$LMT^{-3}I^{-1}$	voltas metrui	V/m
Elektrinė įtampa, elektrinis potencialas, elektrinių potencialų skirtumas, elektrovara	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	voltas	V
Elektrinio srauto tankis (elektrinė indukcija)	$L^{-2}TI$	kulonas kvadratiniam metrui	C/m^2
Elektrinė varža (aktyvioji, reaktyvioji, pilnutinė)	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	omas	Ω
Savitoji elektrinė varža	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	omas iš metro	$\Omega \cdot m$
Elektrinis laidis (aktyvusis, reaktyvusis, pilnutinis)	$L^{-2}M^{-1} \times T^3I^2$	simensas	S
Savitasis elektrinis laidis	$L^{-3}M^{-1} \times T^3I^2$	simensas metrui	S/m
Elektrinė talpa	$L^{-2}M^{-1} \times T^4I^2$	faradas	F
Dielektrinė skvarba	$L^{-3}M^{-1} \times T^4I^2$	faradas metrui	F/m
Elektros srovės tankis	$L^{-2}I$	amperas kvadratiniam metrui	A/m^2
Ilginis elektros srovės tankis	$L^{-1}I$	amperas metrui	A/m
Magnetinio lauko stipris	$L^{-1}I$	amperas metrui	A/m
Magnetovara, magnetinių potencialų skirtumas	I	amperas	A
Magnetinio srauto tankis (magnetinė indukcija)	$MT^{-2}I^{-1}$	tesla	T
Magnetinis srautas	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	vėberis	Wb
Induktyvumas, abipusis induktyvumas	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	henris	H
Magnetinė skvarba	$LMT^{-2}I^{-2}$	henris metrui	H/m

Dydis	Dimensija	Pavadinimas	Vienetas
Elektra ir magnetizmas			
Magnetinis ir EM momentai	L^2I	amperas iš kvadratinio metro	$A \cdot m^2$
Magnetinis dipolinis momentas	$L^3MT^{-2}I^{-1}$	vėberis iš metro	$Wb \cdot m$
Įmagnetėjimas	$L^{-1}I$	amperas metrui	A/m
Magnetinė varža	$L^{-2}M^{-1} \times T^2I^2$	atvirkštinis henris, vienetas henriui	H^{-1} , $1/H$
Magnetinis laidis	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	henris	H
Aktyvioji galia	L^2MT^{-3}	vatas	W
EM energija	L^2MT^{-2}	džaulis	J

4 priedas. SI priešdėliai ir daugikliai kartotiniams bei daliniams vienetams

4 priedo lentelė. SI priešdėliai ir daugikliai vienetams

Priešdėlis	Priešdėlio žymuo	Daugiklis	Priešdėlis	Priešdėlio žymuo	Daugiklis
jota...	Y	10^{24}	deci...	d	10^{-1}
zeta...	Z	10^{21}	centi...	c	10^{-2}
eksa...	E	10^{18}	mili...	m	10^{-3}
peta...	P	10^{15}	mikro...	μ	10^{-6}
tera...	T	10^{12}	nano...	n	10^{-9}
giga...	G	10^9	piko...	p	10^{-12}
mega...	M	10^6	femto...	f	10^{-15}
kilo...	k	10^3	ato...	a	10^{-18}
hekto...	h	10^2	zepto...	z	10^{-21}
deka...	da	10^1	jokto...	y	10^{-24}

