

B priedas. Daugiakriterių sprendimo priėmimo metodų aprašai

B.1. EDAS metodas

EDAS (angl. *The Method of Evaluation Based on Distance from Average Solution*) vertinimo metodas, pagrįstas atstumu nuo vidutinio sprendinio (Keshavarz Ghorabae *et al.* 2015), yra tinkamas vertinant nesuderintus tarpusavyje kriterijus. Skaičiavimo eigos etapai:

1. Atrenkami svarbiausi kriterijai, kuriais aprašomos alternatyvos.
2. Sudaroma pradinė sprendimo priėmimo matrica, kurios stulpeliuose yra alternatyvų kriterijai, o eilutėse – vertinamos alternatyvos.

$$X = [x_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.1})$$

čia m – alternatyvų skaičius, n – kriterijų, apibūdinančių kiekvieną alternatyvą, skaičius, x_{ij} – i alternatyvos j kriterijaus reikšmė.

3. Nustatoma kiekvieno kriterijaus vidutinė reikšmė:

$$x_{aj} = \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij}}{m}. \quad (\text{B.1.2})$$

4. Iš rastų vidutinių reikšmių sudaromas vidutinis sprendinys:

$$A_a = [x_{aj}] = [x_{a1}, x_{a2}, \dots, x_{an}]. \quad (\text{B.1.3})$$

5. Skaičiuojami pozityvūs ir negatyvūs atstumai nuo sprendinio:

$$D = [p_{ij}; r_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11}; r_{11} & p_{12}; r_{12} & \cdots & p_{1n}; r_{1n} \\ p_{m1}; r_{m1} & p_{m2}; r_{m2} & \cdots & p_{mn}; r_{mn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{m1}; r_{m1} & p_{m2}; r_{m2} & \cdots & p_{mn}; r_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1.4})$$

Nustatoma, pagal kurias formules reikia skaičiuoti. Jei uždavinio kriterijų didesnis įvertis yra geriau, skaičiuojama pagal šias formules:

$$p_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{aj}}{x_{aj}}, \quad (\text{B.1.5})$$

$$r_{ij} = \frac{x_{aj} - x_{ij}}{x_{aj}}. \quad (\text{B.1.6})$$

Jei uždavinio kriterijų mažesnis įvertis yra geriau, skaičiuojama pagal šias formules:

$$p_{ij} = \frac{x_{aj} - x_{ij}}{x_{aj}}, \quad (\text{B.1.7})$$

$$r_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{aj}}{x_{aj}}. \quad (\text{B.1.8})$$

6. Skaičiuojamas svartiniai neigiamas ir teigiamas atstumas nuo vidutinio sprendinio:

$$S_{ip} = \sum_{j=1}^n w_j p_{ij}, \quad (\text{B.1.9})$$

$$S_{ir} = \sum_{j=1}^n w_j r_{ij}. \quad (\text{B.1.10})$$

7. Sumos yra normalizuojamos. Jei kriterijų didesnis įvertis yra geriau, teigiamas atstumas dalinamas iš maksimalaus teigiamo:

$$P_i = \frac{S_{ip}}{\max_i S_{ip}}, \quad (\text{B.1.11})$$

Jei geresnis yra mažiausias įvertis, naudojama atimties reikšmė:

$$R_i = 1 - \frac{S_{ir}}{\max_i S_{ir}}. \quad (\text{B.1.12})$$

8. Kiekvienai alternatyvai skaičiuojama daugiakriterė naudingumo funkcijos reikšmė pagal formulę:

$$U_i = \frac{1}{2}(P_i + R_i). \quad (\text{B.1.13})$$

Alternatyvos yra suskirstomos rangais. Geriausia yra didžiausia reikšmė, blogiausia – mažiausia.

B.2. SAW metodas

SAW (angl. *Simple Additive Weighting*) metodo pagrindas yra kriterijų reikšmių ir reikšmingumo sandaugų suma (Antuchevičienė *et al.* 2015; Tupėnaitė *et al.* 2010). Įvesties duomenys – sprendimo matrica ir kriterijų reikšmingumo reikšmės. SAW metodą apibendrina MacCrimon (1968). Skaičiavimo eiga:

1. Normalizuojama sprendimo matrica.
2. To paties varianto (normalizuotos matricos) kiekvienas narys dauginamas iš jo reikšmės ir sudedamas su kitais alternatyvos nariais. Visi sprendimo matricos nariai, kuriuos reikia maksimizuoti, normalizuojami pagal formulę:

$$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j^{\max}}, \quad (\text{B.2.1})$$

o tie, kuriuos reikia minimizuoti – pagal formulę:

$$\bar{x}_{ij} = \frac{x_j^{\min}}{x_{ij}}. \quad (\text{B.2.2})$$

Nustatant varianto racionalumą, atitinkami normalizuotos matricos nariai dauginami iš efektyvumo kriterijų reikšmingumo įverčių ir gautos sandaugos sumuojamos. Racionalaus varianto sandaugų suma bus maksimali:

$$A = \left\{ A_i \left| m a_i \times \sum_{j=1}^n w_j^* \bar{x}_{ij} \right. \right\}. \quad (\text{B.2.3})$$

B.3. TOPSIS metodas

Hwang ir Yoon (1981) sukūrė variantų prioritetų nustatymo metodiką, pagrįstą koncepcija, kad optimali alternatyva turi mažiausią atstumą nuo idealaus sprendimo ir didžiausią atstumą nuo „neigiamai idealaus“ sprendimo (Zavadskas *et al.* 2015b; Tupėnaitė *et al.* 2010). TOPSIS (angl. *The Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution*) vadinamas artumo idealiam taškui nustatymo metodu. Atstumas tarp lyginamosios i -osios ir „idealiai geriausios“ A^+ alternatyvų nustatomas skaičiuojant atstumą n -matėje Euklido erdvėje pagal formulę:

$$L_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (w_j \bar{x}_{ij} - a_j^+)^2}, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (\text{B.3.1})$$

Atstumas tarp lyginamosios i -osios alternatyvos ir „neigiamai idealios“ alternatyvos A^- (angl. *Negative Ideal Solution*) (Hwang, Yoon 1981) skaičiuojamas pagal formulę:

$$L_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (w_j \bar{x}_{ij} - a_j^-)^2}, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (\text{B.3.2})$$

Taikant TOPSIS metodą, sprendimo matrica $X_{[m \times n]} = \{x_{ij}\}, (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ yra normalizuojama vektorinės normalizacijos metodu. Galutiniu TOPSIS metodo etapu nustatomas kiekvienos lyginamosios i -osios alternatyvos santykinis atstumas iki „idealiai geriausios“ alternatyvos:

$$K_i = \frac{L_i^-}{L_i^+ + L_i^-}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{kai } K_i \in [0, 1]. \quad (\text{B.3.3})$$

Kuo K_i reikšmė artimesnė vienetui, tuo lyginamosios i -oji alternatyva artimesnė A^+ , t. y. racionalus variantas bus tas, kurio K_i reikšmė yra didžiausia (Hwang, Yoon 1981).

B.4. ARAS metodas

Zavadsko ir Turskio (2010) sukurtas suminis santykių įvertinimo ARAS (angl. *Additive Ratio Assessment*) metodas gali būti taikomas kiekybinių ir kokybinių kriterijų normalizavimui (Tupėnaitė *et al.* 2010).

Pirmiausia yra sudaroma sprendimo priėmimo matrica:

$$X = \begin{bmatrix} x_{01} & \dots & x_{0j} & \dots & x_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}; i = \overline{0, m}; j = \overline{1, n}, \quad (\text{B.4.1})$$

čia m – alternatyvų skaičius, n – kriterijų, apibūdinančių kiekvieną alternatyvą, skaičius, x_{ij} – i -osios alternatyvos j kriterijaus reikšmė, x_{0j} – optimali kriterijaus reikšmė.

Iš optimalių kriterijų reikšmių sudaroma utopinė optimali alternatyva. Jei optimalaus kriterijaus vertė yra nežinoma, tai:

$$\begin{aligned} x_{0j} &= \max_i x_{ij}, \text{ if } \max_i x_{ij} \text{ is preferable,} \\ x_{0j} &= \min_i x_{ij}^*, \text{ if } \min_i x_{ij}^* \text{ is preferable.} \end{aligned} \quad (\text{B.4.2})$$

Šioje matricoje vienos kriterijų reikšmės optimalios yra maksimalios, kitos – minimalios:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{01} & \dots & \bar{x}_{0j} & \dots & \bar{x}_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{i1} & \dots & \bar{x}_{ij} & \dots & \bar{x}_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{m1} & \dots & \bar{x}_{mj} & \dots & \bar{x}_{mn} \end{bmatrix}; i = \overline{0, m}; j = \overline{1, n}. \quad (\text{B.4.3})$$

Siekiant visas kriterijų reikšmes pakeisti maksimaliomis, matrica normalizuojama:

$$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=0}^m x_{ij}}. \quad (\text{B.4.4})$$

Minimizuojamoms reikšmėms atliekama ta pati procedūra:

$$x_{ij} = \frac{1}{x_{ij}^*}; \bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=0}^m x_{ij}}. \quad (\text{B.4.5})$$

Turint pakeistą sprendimų priėmimo matricą, ji pasverinama, dauginant ją iš kriterijų svorių (B.4.1) ir normalizuojama (B.4.2):

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1, \quad (\text{B.4.5})$$

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{01} & \dots & \hat{x}_{0j} & \dots & \hat{x}_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{x}_{i1} & \dots & \hat{x}_{ij} & \dots & \hat{x}_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{x}_{m1} & \dots & \hat{x}_{mj} & \dots & \hat{x}_{mn} \end{bmatrix}; i = \overline{0, m}; j = \overline{1, n}. \quad (\text{B.4.6})$$

Pagal formulę:

$$\hat{x}_{ij} = \bar{x}_{ij} w_j; i = \overline{0, m}, \quad (\text{B.4.7})$$

apskaičiuojamos ir nustatomos kiekvienos alternatyvos optimalumo funkcijos reikšmės:

$$S_i = \sum_{j=1}^n \hat{x}_{ij}; i = \overline{0, m}. \quad (\text{B.4.8})$$

Tada apskaičiuojamas naudingumo laipsnis pagal formulę:

$$K_i = \frac{S_i}{S_0}; i = \overline{0, m}. \quad (\text{B.4.9})$$

Čia kiekvienos alternatyvos naudingumo laipsnis dalijamas iš optimalios – taip nustatomas optimalumo lygis: kuo arčiau utopinės, tuo jis yra geresnis.

B.5. Laplac'e taisyklė

Daugiakriterių sprendimo priėmimo metodų grupei priklauso ir Laplac'e bei Bayeso taisyklės (Zavadskas *et al.* 2004). Laplac'e taisyklė yra paprasčiausias iš atvejų, pagal kurią visų priešininko strategijų tikimybės yra vienodos. Parenkama ta eilutė, kurios suma yra didžiausia:

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} | S_{1i} \in S_1 \cap \left\{ S_{1i0} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{i0j} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \right\} \right\}. \quad (\text{B.5.1})$$

Formulėje nėra svarbu, ar atsižvelgiama į koeficientą $\frac{1}{n}$, ar ne. Jei šis koeficientas yra, tai gaunamas eilutės vidurkis, į kurį, priimant sprendimą, galima atsižvelgti.

B.6. Bayeso taisyklė

Taikant Bayeso taisyklę (Zavadskas *et al.* 2004), įvertinamas santykinis kriterijų reikšmingumas kitaip nei skaičiuojant pagal Laplac'e taisyklę, kai tariama, jog visi kriterijai sprendimą priimančiams asmenims yra vienodai svarbūs.

Jeigu galima pateikti priešininko strategijų tikimybes q_j , tai matematiniu vidurkiu c_i galima pasinaudoti kaip optimalumo kriterijumi:

$$c_i = \sum_{j=1}^n w_j a_{ij} . \quad (\text{B.6.1})$$

Šis kriterijus mokslinėje literatūroje žinomas kaip vidurkio kriterijus, Bayeso taisyklė ar Bayeso ir Laplac'e principas. Optimali strategija gaunama pagal formulę:

$$S_1^* = \left\{ S_{1i} \left| S_{1i} \in S_i \cap \left\{ S_{1i0} \left| \sum_{j=1}^n w_j a_{i0j} = \max_i \left(\sum_{j=1}^n w_j a_{ij} \right); \sum_{j=1}^n q_j = 1; 1 \leq w_j \leq 0; j = 1, \dots, n \right\} \right. \right\} \quad (\text{B.6.2})$$

Naudojant šį kriterijų gaunamas rizikingas sprendinys.